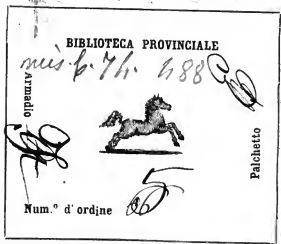


NOZIONI ELEMENTARI

DI

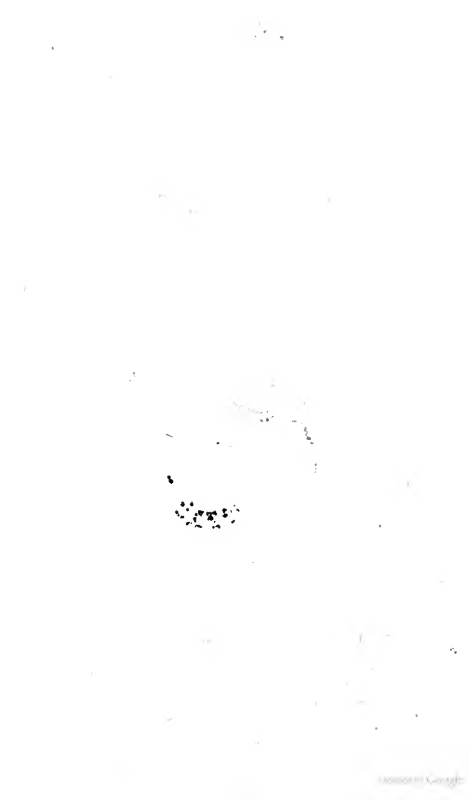
ARITMETICA.





493

Amante



NOZIONI ELEMENTARI

DI ARITMETICA

SCRITTE

Da F. A. per un amico.



NAPOLI

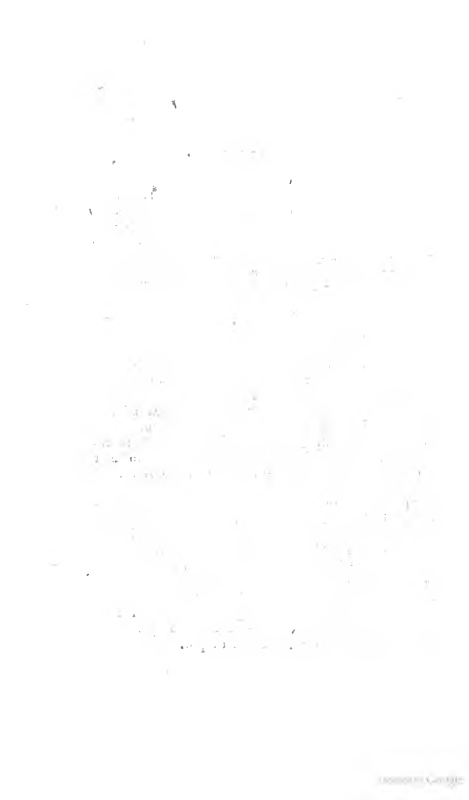
Dalla Reale Tipografia della Guerra.

1830.



AVVERTIMENTO.

QUESTE nozioni elementari di Aritmetica sono state scritte sulla guida dell'eccellente trattato di Aritmetica del signor Lacroix. Il metodo strettamente analitico e le dimostrazioni rigorose adoperate da quel valente autore, danno al suo trattato il carattere che deve avere, di principio e fondamento di tutte le scienze matematiche. Ma ogaun sa che le dimostrazioni aritmetiche, prive del soccorso de' simboli i quali conservano la memoria e le vestigia delle operazioni eseguite, o di quello della figura che presenta all'occhio il soggetto del ragionamento, riescono molto astratte e difficili per gli allievi di tenera età, e forse più delle dimostrazioni geometriche ed algebriche. Intanto la mole colossale e sempre crescente delle scienze esatte non permette che si differisca ad una età più adulta il principio del loro insegnamento. Nella necessità dunque d'insegnare l'Aritmetica ragionata ad un fanciullo di cui l'intendimento non sia ancora perfettamente sviluppato, non dovrà forse riuscire inutile il presente lavoro, nel quale si è creduto di dover modificare alquanto il metodo e le dimostrazioni dell'Aritmetica del signor Lacroix, conservandone però l'ordine delle materie. Il discorso meno astratto e filosofico, lo stile familiare e piano, e la maggior brevità dell'opera, sono le condizioni che sembrano renderne più facile l'insegnamento, e l'esperienza lo ha già dimostrato in qualche caso. In fine queste Nozioni adempirebbero forse meglio all'oggetto cui sono destinate, se maggior agio e tempo si fosse avuto per maturarle di più.



NOZIONI ELEMENTARI DI ARITMETICA.

§. 1.

Distinzione delle diverse specie di grandezze, o quantità.

GRANDEZZA, o *quantità* si chiama tutto ciò che è capace di essere accresciuto o diminuito. Per esempio una compagnia di soldati può essere accresciuta aggiungendovi altri soldati, e può essere anche diminuita togliendone alcuni. Dunque quella compagnia o unione di soldati che si chiama *numero* di soldati, è capace di aumento o di diminuzione, ed è perciò una grandezza. Una strada in città può allargarsi tagliando una porzione delle fabbriche vicine, e può restringersi avanzando in vece nuove fabbriche in mezzo della medesima. Dunque la larghezza della strada è capace di aumento o di diminuzione, ed è pure una quantità.

Vi sono in generale due specie di grandezze o quantità; la quantità *continua*, e la quantità *discreta*.

S'intende per quantità continua quella in cui si considera soltanto l'estensione continuata, e non interrotta delle parti, come sarebbe, una piazza, una strada, un campo, di cui si considera l'ampiezza soltanto, o l'estensione.

S'intende per quantità discreta quella che si considera come l'unione di più parti eguali o di più cose simili, e si chiama *numero*; come sarebbe il numero delle miglia comprese nella distanza fra due luoghi, o il numero de' ducati che compongono una somma di denaro.

La Geometria si occupa delle quantità continue, e l'Aritmetica si occupa delle quantità discrete, ossia de' numeri.

§. 2.

Del sistema di numerazione.

Per numero dunque s'intende l'unione di più cose simili; così un numero di uomini è l'unione di più uomini; un numero di cannoni, è l'unione di più cannoni ec.

Unità si chiama una delle cose simili che compongono il numero, il quale si considera perciò come l'unione di molte unità. Questa unione di unità potendo essere più o meno grande, ed es-

sendo capace anche di crescere indefinitamente, è chiaro che vi sono moltissimi, ed anzi infiniti numeri tutti fra loro diversi. Per distinguerli uno dall'altro, e per giudicare della loro grandezza rispettiva, è necessario indicarli con parole, e con cifre scritte corrispondenti alle parole; ma non potendosi adoperare infinite parole ed infinite cifre per rappresentarli, conviene servirsi di poche cifre e di poche parole, e procurare di combinarle in modo che possano facilmente rappresentare qualunque numero.

Sistema di numerazione si chiama appunto la *convenzione*, ossia il generale accordo de' dotti che stabilisce quelle parole, e quelle cifre principali, ed il modo ancora di farne uso, onde esprimere con esse qualunque numero. Le cifre principali e le loro denominazioni sono le seguenti:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
 uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, ..

La prima corrisponde all'unità, e le altre rappresentano unioni, o collezioni di unità gradatamente maggiori, dimodochè fra due cifre successive, quella che vien dopo è sempre maggiore della precedente di un'unità.

Se all'ultimo numero *nove* si aggiunga un'unità, si avrà un altro numero che si esprime con la parola *dieci*, e corrisponde al numero delle dita che contiamo nelle due mani. Questo numero ha servito mirabilmente a combinare le nove cifre precedenti nel modo più semplice e breve per esprimere tutti i numeri immaginabili, ed è considerato perciò come il fondamento del nostro sistema di numerazione, il quale prende da esso il nome di sistema *decimale* di numerazione.

Si è stabilito che un'unità situata alla sinistra di un'unità semplice debba valere dieci volte l'unità semplice, ossia debba eguagliare l'unione di dieci unità semplici; una terza unità situata alla sinistra della seconda, debba valere dieci volte la seconda, e così di seguito.

Si sono formate dunque diverse specie o classi di unità, che si distinguono co' nomi corrispondenti alle unità contenute nel seguente numero, crescenti dalla destra verso la sinistra.

1	1	1	1	1	1
centinajo di migliaia	decina di migliaia	migliaio	centinajo	decina	unità

7
Per tal modo componendo un numero con più cifre una vicina all' altra , questo numero sarà la collezione di diverse specie di unità, delle quali ognuna vale dieci volte la sua vicina a destra , e dièesi *decupla* della medesima. Per esempio il numero 327 composto di tre cifre contiene sette unità , due decine , e tre centinaja , le quali si considerano tutte riunite , e formanti un solo insieme , o , come suol dirsi , un *sol tutto*.

A ciascuna classe o specie di unità appartengono nove numeri come alla classe delle unità semplici. Così le decine possono essere una , due , tre , quattro , cinque , sei , sette , otto , e nove ; nè possono essere più di nove , perchè un numero composto di dieci decine prende il nome di centinajo. Lo stesso vale per le centinaja , per le migliaja ec. Questi nove numeri si distinguono , per le varie classi di unità , coi seguenti nomi ,

Per le decine i nomi sono ,

dieci , venti , trenta , quaranta , cinquanta , sessanta , settanta , ottanta , e novanta.

Per le centinaja ,

cento , duecento , trecento novecento.

Per le migliaja ,

mille , duemila , tremila novemila.

Per le decine di migliaja , e centinaja di migliaja ,

diecimila , ventimila , trentamila novantamila.

centomila , duecentomila , trecentomila novecentomila.

Un numero composto di più cifre appartenenti a diverse classi , si nomina riunendo insieme i nomi particolari delle cifre che contiene. Per esempio il numero precedente 327 , si nomina *trecento ventisette* ; il numero 35271 , si nomina *trentacinquemila duecento settantuno* , e così di altri. Solamente i nomi di alcuni numeri di due cifre si compongono in un modo particolare ; il numero 11 si nomina *undici* in vece di *dieci-uno* , ed i numeri 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , si nominano *dodici , tredici , quattordici , quindici , sedici*.

Estendendo le classi delle unità al di là delle centinaja di migliaja , con lo stesso principio che una nuova unità debba sempre esser decupla della sua vicina a destra , la settima cifra prende il nome di *milione*. Le unità seguenti , cioè l'ottava , la nona etc. sino alla dodicesima inclusivamente , si distinguono usando le denominazioni che appartengono alle prime sei cifre coll'aggiunta della parola *milione*. Così i numeri del settimo , ottavo , nono etc. luogo saranno espressi come segue ,

Un milione , due milioni , tre milioni . . .

Dieci milioni , venti milioni , trenta milioni . . .

Cento milioni , duecento milioni . . .

Mille milioni , duemila milioni etc. . . .

L'unità situata nel tredicesimo luogo prende il nome di *bilione*. Appartengono al bilione sei cifre come al milione, le quali si distinguono sempre colle denominazioni usate per le prime sei cifre, aggiungendo la parola *bilione*. Lo stesso vale pel *trilione*, pel *quadrilione* etc.

Si concepisce facilmente come queste denominazioni bastino per esprimere qualunque numero. Non bastano però a scriverlo le nove cifre sopra riportate. In fatti può darsi il caso che un numero composto di più cifre, non contenga unità di una certa classe: per esempio il numero trecento e sette, contiene tre centinaia e sette unità semplici, senza decine. Allora se si scrivesse colle sole due cifre 37 senz'altro, si leggerebbe *trentasette*. Per supplire a questa mancanza si è immaginata la cifra, 0, che si pronunzia *zero*, e non ha alcun valore, ma serve soltanto a conservare alle diverse cifre il loro luogo. Così il numero trecento e sette si scriverà 307. Mancando le unità di molte classi, si suppliranno sempre con altrettanti zeri. In questo modo si scriveranno i numeri,

dieci, cento, mille, diecimila etc.

10, 100, 1000, 10000 e simili

Le prime nove cifre si chiamano *significative* per distinguerle dalla cifra zero che non ha alcun valore.

§. 3.

Maniera di leggere un numero.

Per leggere un numero si separano le sue cifre da sei in sei con virgole, cominciando dalla destra. Ogni gruppo di sei cifre contiene le unità, le decine, le centinaia, le migliaia, le decine di migliaia, e le centinaia di migliaia di una medesima denominazione, e le denominazioni sono quelle accennate di sopra, cioè:

- 1.º gruppo unità.
- 2.º gruppo milioni.
- 3.º gruppo bilioni.
- 4.º gruppo trilioni etc.

come si osserva nel numero

trilioni bilioni milioni unità

4.351, 607.200, 925.001, 003.005

che si pronunzia *quattromila trecento cinquantuno trilioni, seicento settemila e duecento bilioni, novecento venticinque mila ed un milione, tremila e cinque.*

Dopo di essersi perfettamente addestrati a leggere qualunque numero, non è difficile anche scriverlo sotto la dettatura, e basta per ciò ricordarsi che ogni denominazione deve contenere sei cifre, per cui bisogna supplire con zeri quei luoghi che dall'enun-

9
ciazione del numero si conosce che rimangono vuoti di cifre significative. E chiaro poi che le cifre del primo gruppo a sinistra dalle quali si comincia sempre a leggere o a scrivere il numero, non è necessario che siano sei, come quelle degli altri gruppi.

§. 4.

Cosa sia un numero astratto, ed un numero concreto.

Numeri astratti sono quelli che rappresentano una collezione di unità di cui non si conosce, o non si è fissata la natura, o la specie. Così quando si pronunzia *duecento e tre* senza aggiungere altro, s'intende una collezione di duecento e tre unità di qualità o specie non conosciuta, ma quando si dice *duecento e tre uomini*, *duecento e tre ducati* etc. allora la specie dell'unità è l'uomo, il ducato etc., ed il numero si chiama *concreto*.

§. 5.

Dell'addizione de' numeri interi.

L'addizione è quella operazione che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo.

Le addizioni de' numeri di una sola cifra sono facili ad eseguirsi a memoria con un poco di pratica.

Quando i numeri da aggiungersi sono composti di più cifre, è chiaro che l'addizione dovrà eseguirsi aggiungendo fra loro le unità della stessa classe; cioè le unità semplici si aggiungeranno alle unità semplici, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia, le migliaia alle migliaia etc.

In questo modo l'addizione de' numeri composti di più cifre non è che una ripetizione dell'addizione de' numeri di una sola cifra, come si vede nell'esempio

$$\begin{array}{r} 423 \\ 214 \\ 322 \\ \hline \end{array}$$

959

Il risultato dell'addizione dicesi *somma*; così il numero 959 è la somma de' tre numeri 423, 214, e 322.

Ma può accadere che la somma delle unità semplici sorpassi il numero 9; allora è chiaro che la somma medesima sarà composta di due cifre, e conterrà una o più decine, le quali appartenendo al secondo luogo, dovranno riunirsi alla somma delle decine. Se anche la somma delle decine sorpassa il 9, allora è seguuo che contiene qualche centinaio, e dovrà questo aggiungersi

alla somma delle centinaia; e così di seguito. Tutto ciò si rende manifesto nell'esempio,

$$\begin{array}{r} 427 \\ 35 \\ 924 \\ 15 \\ \hline \end{array}$$

1401

Dunque la regola per eseguire l'addizione sarà la seguente: *Scrivete i numeri da sommarsi gli uni sotto gli altri, situando le unità dello stesso ordine in una medesima colonna. Tirate una linea sotto l'ultimo numero per separarlo dal risultato. Sommate i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla destra; se la somma non sorpassa il 9, scrivetela come l'avete ottenuta, e se contiene una o più decine, ritenetele per riunirle alla colonna seguente. Finalmente scrivete la somma dell'ultima colonna come risulta dall'operazione.*

§. 6.

Della sottrazione de' numeri interi.

La sottrazione è un'operazione che ha per oggetto di togliere un numero da un altro.

La sottrazione de' numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi a memoria. Ne' numeri composti di più cifre, si sottraggono le une dalle altre le unità di uno stesso ordine, e così questa operazione non è che una ripetizione della sottrazione de' numeri di una sola cifra: si sottraggono dunque le unità dalle unità, le decine dalle decine etc.

Ma può accadere che il numero da sottrarsi in una colonna qualunque sia maggiore di quello da cui deve togliersi. Allora si farà come nell'esempio seguente

$$\begin{array}{r} 4063 \\ 387 \\ \hline 3676 \end{array}$$

Non potendo togliersi il 7 dal 3, si suppone il numero superiore 4063 composto di 4050 e di 13, ed aggiungendo così al 3 una decina improntata dalla seconda colonna, la sottrazione può effettuarsi, ed il resto è 6. Ha luogo lo stesso inconveniente nella sottrazione delle cifre della seconda colonna, e bisognerà per poterla cseguire, improntare un'unità della terza colonna. Ma la terza colonna non avendo cifre significative, bisogna ricorrere alla quarta, supponendo il numero 4050 spezzato in due, cioè 3900 e 150. Così dalle 15 decine potranno togliersi le 8 del numero

inferiore, e dalle 9 centinaja del numero superiore si toglieranno pure in seguito le 3 centinaja del numero inferiore.

Dopo di ciò la regola della sottrazione sarà la seguente: *Situate il numero minore sotto il maggiore, e tirate una linea per separarlo dal risultato. Sottraete il numero di ciascuna colonna dal suo superiore, e quando ciò non possa eseguirsi, improntate una decina dalla colonna seguente. Nel caso che vi siano zeri intermedi, considerateli come 9, diminuendo di una unità la prima cifra significativa che viene dopo gli zeri.*

Il risultato della sottrazione di un numero da un altro dicesi *resto*.

§. 7.

Della ripruova dell'addizione, e della sottrazione.

Se dopo aver eseguita l'addizione di più numeri, dalla somma ottenuta si tolgano uno dopo l'altro tutte le parti che compongono i numeri stessi, è chiaro che dovrà aversi un resto eguale a zero, quando l'addizione sia stata ben fatta. Perciò la ripruova dell'addizione si fa nel modo seguente.

Si aggiungono fra loro i numeri di ciascuna colonna cominciando dalla sinistra, ed i risultati si sottraggono uno dopo l'altro dalle corrispondenti cifre della somma già ottenuta, tenendo conto de' resti, l'ultimo de' quali dovrà essere zero, come nell'esempio

$$\begin{array}{r} 4275 \\ 371 \\ 3311 \\ \hline 46 \end{array}$$

Somma . . 8003

1.^o resto . 1

2.^o resto . 2

3.^o resto . 1

4.^o resto . . 0

Dove si osserva che i resti devono considerarsi come decine avanti alla cifra seguente della somma.

Per la ripruova della sottrazione è evidente che il numero minore aggiunto al resto deve dare il numero maggiore, il quale può considerarsi composto del numero minore, e del resto. Perciò la ripruova della sottrazione si esegue per mezzo dell'addizione

$$\begin{array}{r} \text{Esempio} \quad 4270 \\ 329 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Resto} \quad 3941 \\ \text{Numero minore} \quad 329 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Somma, o numero maggiore} \quad 4270$$

§. 8.

Della moltiplicazione de' numeri interi.

La moltiplicazione de' numeri interi è un' abbreviazione dell'addizione, quando i numeri da aggiungersi sono fra loro eguali.

Per esempio debba eseguirsi l'addizione

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

Questa operazione consiste nel ripetere il numero 16 quattro volte, e si esegue più brevemente colle regole della moltiplicazione.

In una moltiplicazione si distinguono tre numeri: il *moltiplicando* ch'è il numero da ripetersi; il *moltiplicatore* che indica quante volte deve ripetersi, ed il *prodotto* ch'è il risultato della operazione. Nell' esempio proposto, 16 è il moltiplicando, 4 è il moltiplicatore, e 64 è il prodotto. Il moltiplicando, ed il moltiplicatore si chiamano i *fattori* del prodotto; così 16 e 4 sono i fattori di 64.

La moltiplicazione de' numeri offre tre casi: 1.° la moltiplicazione di due numeri di una sola cifra: 2.° la moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di una sola cifra: 3.° la moltiplicazione di un numero di più cifre per un altro numero di più cifre.

1.° La moltiplicazione de' numeri di una sola cifra è facile ad eseguirsi, per mezzo della seguente tavola detta di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formare questa tavola si scrivono in una linea orizzontale i numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

si aggiunge poi ciascun numero con se stesso, e si forma una seconda linea; la somma dei numeri della prima e della seconda linea darà la terza linea; e quella de' numeri della prima e della terza darà la quarta, e così di seguito. Così ogni numero della seconda linea corrisponde a ciascun numero della prima ripetuto due volte; ogni numero della terza linea corrisponde a quello della prima ripetuto tre volte etc. L'uso della tavola è molto facile.

Nella tavola di Pitagora si osserva che il prodotto di un numero per un altro rimane lo stesso se si prenda il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore. Per esempio il prodotto di 3 per 5 è lo stesso di quello di 5 per 3; cioè 5 ripetuto tre volte, è lo stesso che 3 ripetuto cinque volte. In fatti disponendo in una linea orizzontale le unità che sono comprese nel numero 5, e scrivendo due linee simili al di sotto, si vede che contando le linee orizzontali si ha

```

      1 1 1 1 1
      1 1 1 1 1
      1 1 1 1 1
  
```

il 5 ripetuto tre volte, e contando le linee verticali nello stesso quadro, si ha il 3 ripetuto cinque volte.

2.^o Per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola cifra si prenda per esempio la moltiplicazione di 267 per 4; l'operazione da eseguirsi è quella di ripetere il numero 267 quattro volte, ed è chiaro che bisognerà ripetere quattro volte le unità, quattro volte le decine, e quattro volte le centinaia che sono in quel numero, e sommare i risultati che se ne ottengono. La moltiplicazione potrebbe dunque farsi come segue,

```

    267
     4
  ----
    28
   240
   800
  ----
  1068
  
```

Ma invece di scrivere tre prodotti, si potrà scriverne un solo, ritenendo a memoria le decine ottenute dal primo prodotto delle unità semplici; per aggiungerle al prodotto delle decine, e ritenendo a memoria le centinaia ottenute dal prodotto delle de-

14
cine, per unirle al prodotto delle centinaja. L'operazione abbreviata sarà,

$$\begin{array}{r} 267 \\ 4 \\ \hline 1068 \end{array}$$

Prima di passare al 3.^o caso della moltiplicazione vediamo come potrebbe moltiplicarsi il numero 267 per 40. Moltiplicare 267 per 40 significa ripeterlo quaranta volte, o sia dieci volte quattro. Per ripetere il numero 267 quattro volte si userà la regola precedente, e si otterrà 1068. Questo prodotto deve ora ripetersi 10 volte, lo che si ottiene subito aggiugnendovi uno zero, giacchè allora le unità diventano decine, le decine diventano centinaja, le centinaja diventano migliaia, e le migliaia, decine di migliaia, onde ogni unità del numero 1068 rimane moltiplicata per 10. Se il numero 267 dovesse moltiplicarsi per 400, lo stesso ragionamento ci farebbe conoscere che dovrebbe moltiplicarsi per 4, e poi aggiugnervi due zeri. E se il numero dovesse moltiplicarsi per 4000, si moltiplicherebbe prima per 4 e poi vi si aggiungerebbero tre zeri, e così di seguito. Si opererebbe allo stesso modo se dovesse moltiplicarsi un numero per 30, per 300, o per 3000 ec., e per qualunque altra cifra significativa seguita da uno o più zeri.

3.^o Sia da moltiplicarsi il numero 267 per 324. Bisognerà ripetere il numero 267 trecento ventiquattro volte, cioè trecento volte, più venti volte, più quattro volte. Dovrà per conseguenza moltiplicarsi il 267 prima per 4, poi per 20, indi per 300, e sommare i tre prodotti parziali ottenuti. Questa operazione dopo ciò che si è detto finora non ha alcuna difficoltà, e si eseguirà come qui appresso.

	Moltiplicando	267
	Moltiplicatore	324
1. ^o prodotto parziale		1068
2. ^o prodotto parziale		5340
3. ^o prodotto parziale		80100

Prodotto totale 86508

dove possono omettersi senza inconveniente gli zeri situati alla destra del 2.^o e del 3.^o prodotto parziale, purchè le cifre significative de' prodotti medesimi siano collocate nel proprio luogo.

Se il moltiplicando contenga uno o più zeri alla dritta, si tralasceranno per brevità nell'eseguire la moltiplicazione, ma si aggiungeranno dopo terminata l'operazione alla destra del prodotto ottenuto, affine di conservare ad ogni cifra significativa il suo

go che le compete. Lo stesso potrà farsi se il moltiplicatore è seguito da zeri, per una ragione analoga a quella accennata di sopra relativamente alla moltiplicazione di un numero qualunque per una cifra significativa seguita da zeri.

Quando il moltiplicatore contenga qualche zero fra mezzo alle cifre significative, siccome il prodotto parziale corrispondente a quella cifra zero sarebbe composto di soli zeri, così potrà omettersi, per brevità di scrittura, badando di situare convenientemente il prodotto parziale che viene appresso.

La regola della moltiplicazione sarà dunque la seguente: *Per moltiplicare due numeri qualsivogliano, si formano i prodotti parziali di ogni cifra del moltiplicatore per tutto il moltiplicando, badando bene di situare le unità sotto le unità, le decine sotto le decine etc., e poi si sommano i prodotti parziali. Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore, o uno de' due contengano uno o più zeri alla dritta, si trascureranno nell'eseguire l'operazione, e si aggiungeranno in fine al prodotto ottenuto.*

Finalmente siccome nella moltiplicazione il prodotto è formato dal moltiplicando ripetuto tante volte, quante unità si numerano nel moltiplicatore, così potrà dirsi che il prodotto stesso contenga in se un egual numero di volte il moltiplicando. Quando un numero contiene un altro due volte, dicesi *doppio* del medesimo, quando lo contiene tre volte dicesi *triplo*; quattro volte, *quadruplo*; cinque volte, *quintuplo* ec. Così 6 è doppio di 3, ed è triplo di 2; e 10 è doppio di 5, e quintuplo di 2.

§. 9.

Della divisione de' numeri interi.

La divisione è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno de' suoi fattori, si cerca l'altro fattore. È dato per esempio il prodotto 64 ed uno de' suoi fattori 16; la divisione ha per oggetto di trovare l'altro fattore 4.

Nella divisione si considerano dunque tre numeri cioè, il prodotto dato, che si chiama *dividendo*, il fattore dato, che si chiama *divisore*, ed il fattore cercato, che si chiama *quoziente*. Questi numeri si situano come quì sotto.

Dividendo, o prodotto dato

64

Divisore, o fattore dato

16

—
4 *quoziente, o fattore cercato.*

E poichè il divisore ed il quoziente sono i due fattori del

dividendo, si può conchiudere che *in una divisione qualunque il divisore moltiplicato pel quoziente deve dare il dividendo.*

Ora si sa dalla moltiplicazione, che il prodotto 64 nasce dal 16 ripetuto quattro volte, onde è chiaro che il numero 16 sarà contenuto quattro volte nel numero 64; e siccome la divisione ha per oggetto di trovare il fattore 4, potrà anche dirsi che la divisione ha per oggetto di trovare il numero delle volte che il 16 è contenuto nel 64, ed in generale: la divisione è quella operazione per mezzo della quale si cerca di conoscere quante volte un numero è contenuto in un altro. Per trovare quante volte il numero 16 è contenuto nel 64, potrebbe adoperarsi la sottrazione ripetuta, come segue

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 16 \\
 \hline
 48 \\
 16 \\
 \hline
 32 \\
 16 \\
 \hline
 16 \\
 16 \\
 \hline
 00
 \end{array}$$

dalla quale operazione si vede che il 16 è contenuto quattro volte nel 64, poichè tolto quattro volte dal 64 si è avuto un resto zero. Per mezzo della divisione si giunge più brevemente a questo risultato, per cui può dirsi che la divisione è un' abbreviazione della sottrazione.

Inoltre il prodotto 64 può anche considerarsi come il 4 ripetuto 16 volte, perchè ripetere quattro volte 16 è lo stesso che ripetere 16 volte 4 (§. 8.). Quindi il numero 64 può suporsi composto di 16 parti eguali, ognuna delle quali è un 4; quando si divide 64 per 16 l'operazione si riduce dunque a decomporre il numero 64 in sedici parti eguali, e trovare il valore di una di queste parti, che sarebbe 4. Dopo di ciò si vede che la divisione può considerarsi anche come una operazione nella quale si cerca di decomporre un numero dato in tante parti uguali per quante unità sono contenute in un altro numero dato.

Dunque la divisione può considerarsi sotto tre diversi aspetti.

1.^o La divisione è quella operazione per la quale dato un prodotto ed uno de' suoi fattori, si cerca l'altro fattore.

2.° La divisione è quella operazione per la quale si cerca quante volte un numero è contenuto in un altro.

3.° La divisione è quella operazione per la quale si cerca di decomporre un numero dato in tante parti uguali per quante unità si contengono in un altro numero dato.

Nella divisione di 64 per 16 il quoziente 4 può avere perciò tre significati: 1.° esso è l'altro fattore di 64 che si cercava: 2.° esso dinota il numero delle volte che il 16 è contenuto nel 64: 3.° esso è una delle sedici parti eguali in cui si è diviso il 64.

È interessante di ben comprendere questi tre oggetti della divisione per ciò che dovrà dirsi in seguito.

Ciò premesso, si distinguono tre casi nella divisione, cioè,

1.° Quando il divisore è di una sola cifra, ed il dividendo è minore di dieci volte il divisore.

2.° Quando il dividendo è di più cifre ed il divisore è di una sola cifra.

3.° Quando il dividendo ed il divisore sono due numeri di più cifre.

Nel 1.° caso è evidente che la divisione si esegue per mezzo della tavola di Pitagora, cercando qual è il numero che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Così dovendo dividersi 45 per 5, si vede che il quoziente è 9, perchè 9 è quel numero che moltiplicato per 5 dà per prodotto 45. Ma spesso non si trova nella tavola di Pitagora un numero che moltiplicato pel divisore dia esattamente il dividendo, come per esempio se dovesse dividersi 47 per 5. Ciò dimostra che vi sono alcuni numeri che non possono dividersi esattamente per altri. Allora il dividendo è composto di un prodotto esatto del divisore per un altro numero, e di un resto minore del divisore. Il 47 per esempio contiene il numero 45, prodotto esatto di 9 per 5, ed il resto 2 minore del divisore 5.

Nel secondo caso della divisione sia da dividersi 1068 per 4. L'operazione da eseguirsi sarà quella di trovare un numero tale che moltiplicando le sue unità, decine, centinaia ec. per 4 si abbiano le unità, decine, centinaia ec., del dividendo 1068; giacchè il dividendo 1068 si considera come un prodotto, del quale si conosce il fattore 4, e si cerca l'altro fattore.

Cominciamo ad osservare che il quoziente non può contenere migliaia, poichè se contenesse un solo migliajo, questo moltiplicato per 4 darebbe un prodotto maggiore del dividendo. Il quoziente potendo contenere centinaia, sarà dunque un numero di tre cifre, onde per ciò che si è detto, il dividendo 1068 dovrà contenere tre prodotti, cioè cominciando dalla sinistra conterrà,

1.° Il prodotto delle centinaia del quoziente per 4,

2.° Il prodotto delle decine del quoziente per 4,

3.° Il prodotto delle unità del quoziente per 4.

Ed è chiaro che questi tre prodotti dovranno trovarsi rispettivamente nelle centinaja, nelle decine, e nelle unità del dividendo.

Separiamo con una virgola le centinaja del dividendo; il numero 10 di queste centinaja dovrà contenere il primo prodotto, e cercando nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 10, si trova 2, e questo numero esprimerà le centinaja del quoziente. Il primo prodotto delle centinaja del quoziente per 4 è dunque 8, e tolto dal 10, non resteranno nel dividendo che i due altri prodotti. Le due centinaja che rimangono dalla prima sottrazione appartengono al secondo prodotto, il quale dovrà trovarsi nel numero 26 composto del resto 2, e della cifra delle decine 6, ossia di 26 decine. Cercato nella tavola di Pitagora il numero che moltiplicato per 4 dà un prodotto prossimo al 26, si trova 6, e questa sarà la cifra delle decine del quoziente. Il secondo prodotto delle decine del quoziente per 4 sarà dunque 24 che tolto dal 26, dà un resto 2 che appartiene al terzo prodotto. Questo terzo prodotto dovrà trovarsi nel numero 28 formato dal resto 2 delle decine, e dalle unità del dividendo; e nella tavola di Pitagora si troverà che il numero 7 è quello che moltiplicato pel divisore 4 dà per terzo prodotto 28, il quale si toglierà dall'ultima parte del dividendo 28, e la divisione sarà terminata essendosi esaurito il dividendo.

$$\begin{array}{r}
 10,68 \\
 \underline{8} \\
 26 \\
 \underline{24} \\
 28 \\
 \underline{28} \\
 00
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 267
 \end{array}$$

Si vede chiaramente che in tutta l'operazione ora descritta non si è fatto altro che scomporre il dividendo, o prodotto dato in tre prodotti parziali formati dal divisore moltiplicato per ciascuna cifra del quoziente. I tre prodotti parziali sono stati 8 centinaja, 24 decine, e 28 unità,

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 24 \\
 28 \\
 \hline
 1068
 \end{array}$$

che sommati insieme danno il dividendo, e sono quelli stessi che

risultano dalla moltiplicazione del quoziente 267 per 4, come si è osservato parlando della moltiplicazione, 19

$$\begin{array}{r}
 267 \\
 \times 4 \\
 \hline
 28 \\
 24 \\
 8 \\
 \hline
 1068
 \end{array}$$

Si distinguono nella divisione i dividendi parziali, ed i prodotti parziali come qui appresso

	Dividendo	Divisore
1.º Dividendo parziale	10,68	4
1.º Prodotto parziale	8	
		267 quoziente
2.º Dividendo parziale	26	
2.º Prodotto parziale	24	
3.º Dividendo parziale	28	
3.º Prodotto parziale	28	
Resto	00	

Quando un dividendo parziale risulta minore del divisore, la divisione non può eseguirsi, ed è segno che il quoziente non contiene alcuna unità di quell'ordine; si scrive allora uno zero nel quoziente stesso per non alterare il numero delle cifre che deve contenere, e si passa subito a formare il dividendo parziale relativo alla cifra consecutiva del quoziente, come nell'esempio,

1.º Dividendo parziale	16,12	4
1.º Prodotto parziale	16	
		403
2.º e 3.º Dividendo parz.	1,2	
3.º Prodotto parziale	12	
Resto	00	

Il terzo caso della divisione non presenta ora alcuna difficoltà. Sia da dividersi il numero 114276 per 428. Dovrà trovarsi un numero tale che le sue unità, decine, centinaja ec. moltiplicate per 428 diano altrettanti prodotti parziali, di cui la somma eguagli il dividendo proposto 114276.

Primieramente il quoziente non potrà contenere migliaia, ma sole centinaja, e perciò sarà composto di tre cifre, e quindi il dividendo che deve risultare dalla moltiplicazione del divisore pel quoziente dovrà contenere tre prodotti parziali i quali saranno,

- 1.° Il prodotto delle centinaia del quoziente per 428.
- 2.° Il prodotto delle decine del quoziente per 428.
- 3.° Il prodotto delle unità del quoziente per 428.

Separiamo con una virgola le prime quattro cifre del dividendo che contengono le centinaia, ed avremo 1142. Questo primo dividendo parziale dovrà contenere il primo prodotto parziale di cui ora si è parlato, e cercando quale numero moltiplicato per 428 dà un prodotto il più prossimo a 1142, si trova che questo numero è 2, il quale esprimerà le centinaia del quoziente. Tolto il primo prodotto parziale 856 dal primo dividendo parziale, al resto 286 si aggiungono le decine 7 che contiene il dividendo, e si forma il secondo dividendo parziale 2867 che deve contenere il secondo prodotto parziale. Si cerchi quale numero moltiplicato per 428 dia un prodotto prossimo a 2867, e si troverà 6 per questo numero, il quale esprimerà le decine del quoziente. Dal secondo dividendo parziale tolto il secondo prodotto parziale 2568 si avrà per resto 299 al quale aggiunte le unità 6 del dividendo, si avrà il terzo ed ultimo dividendo parziale che dovrà contenere l'ultimo prodotto parziale. Il numero 7 che moltiplicato per 428 dà un prodotto 2996 eguale all'ultimo dividendo parziale, rappresenterà le unità del quoziente, e fatta la sottrazione, si avrà un resto zero, e l'operazione sarà terminata.

In questa operazione il dividendo è stato decomposto ne' tre prodotti parziali 856 centinaia, 2568 decine, e 2996 unità, i quali sommati insieme riproducono lo stesso dividendo e sono quindi medesimi prodotti parziali che risultano dalla moltiplicazione del quoziente 267 pel divisore 428 come si osserva qui appresso,

Dividendo	Divisore	428 Divisore
1142,76	428	267 Quoziente
856		
2867	267 Quoziente	2996
2568		2568
		856
2996		
2996		
Resto 0000		114276 Dividendo

Resto 0000

La divisione si abbrevia quando il dividendo ed il divisore sono terminati da più zeri, potendo togliersi un egual numero di zeri tanto dall'uno quanto dall'altro, senza che il quoziente ne rimanga alterato; poichè il numero delle volte che il divisore è contenuto nel dividendo è lo stesso, quantunque l'uno e l'altro sieno divenuti 10 volte, 100 volte etc. minori di quello che erano. Così il 4 è contenuto 9 volte in 36, nello stesso modo che il 40 è contenuto 9 volte in 360, ed il 400 9 volte in 3600.

Ripruova della moltiplicazione e della divisione.

La moltiplicazione e la divisione sono due operazioni che servono scambievolmente una di riprova all'altra. Per provare l'esattezza di una moltiplicazione, si divide il prodotto per uno de' fattori, e deve ottenersi l'altro fattore. Se ciò non si verifica l'operazione è errata.

Al contrario per provare una divisione, siccome il dividendo corrisponde ad un prodotto di cui i fattori sono il divisore ed il quoziente, si moltiplicano questi due numeri fra loro, e deve ottenersi il dividendo. Se ciò non si verifica, l'operazione è errata.

Quando però la divisione ha un resto, allora è seguuo che il dividendo non è il prodotto esatto del divisore pel quoziente, e perciò a questo prodotto deve aggiungersi il resto per ottenere il dividendo, come si è già osservato parlando del primo caso della divisione (§. 9.)

DELLE FRAZIONI

Origine delle frazioni.

Le frazioni hanno origine dal resto della divisione. Sia da dividersi il numero 65 per 4. Questa operazione consiste nel dividere il numero 65 in quattro parti eguali (§. 9.). Il quoziente è 16; ma questo numero non è contenuto quattro volte esattamente nel 65, o come suol dirsi, non è l'esatta *quarta parte* di 65, poichè vi rimane un'unità ancora da dividersi in quattro parti eguali.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 4 \overline{) 65} \\ \underline{25} \\ 24 \\ \underline{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

Resto 1

Immaginando eseguita la divisione di questa unità in quattro parti eguali, una di esse parti, ossia la quarta parte dell'unità si scrive così, $\frac{1}{4}$, ed i numeri 4 ed 1 separati da una piccola linea, indicano che l'unità si è divisa in quattro parti

eguali, e di queste parti se n'è presa una. L'espressione $\frac{1}{4}$, che si pronunzia *un quarto*, dicesi *frazione*, ed aggiunta al quoziente 16, dà $16\frac{1}{4}$ che rappresenta l'esatta quarta parte di 65.

Dovendo dividersi 66 per 4, il resto sarà 2, e dovrà trovarsi la quarta parte di questo numero per aggiungerla al quoziente 16, e renderlo completo. Per dividere il 2 in quattro parti eguali, riflettiamo che questo numero contiene due unità, e perciò dovrà suppersi ognuna di queste unità divisa in quattro parti eguali, e prendere da ciascuna unità una delle quattro parti che contiene. Così la quarta parte del 2 sarà composta di $\frac{1}{4}$ di unità più $\frac{1}{4}$ di unità, ossia di *due quarti* di unità, che si scrivono, $\frac{2}{4}$.

Se dovesse prendersi la quarta parte di 3, si vedrebbe similmente che essa è composta di $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{4}$ dell'unità, ossia di tre quarti dell'unità, che si scrivono, $\frac{3}{4}$. Dunque può conchiudersi che le espressioni $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, hanno due significati; indicano cioè la quarta parte de' numeri 2, e, 3, ed indicano pure che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, e di queste parti se ne sono prese due, o tre.

Fin qui abbiamo considerato soltanto le frazioni che nascono dall'unità divisa in quattro parti, perchè il divisore della divisione proposta era 4, ed in quattro parti doveva dividersi il resto. Ma si cambi il divisore, e sia per esempio 3; la divisione sarà la seguente,

$$\begin{array}{r} 65 \qquad 3 \\ 6 \qquad \underline{\hspace{1cm}} \\ \hline 5 \qquad 21 \\ 3 \qquad \underline{\hspace{1cm}} \\ \hline \end{array}$$

Resto 2

Dovrà ora dividersi il resto 2 in tre parti eguali, ed aggiungersi una delle tre parti, ossia la *terza parte* di 2 al quoziente. Questa operazione si eseguirà immaginando divisa in tre parti eguali ognuna delle unità contenute nel 2, e prendendo una parte da ciascuna unità. La frazione che ne nasce si scrive, $\frac{2}{3}$; e si pronunzia *due terzi*; essa rappresenta la *terza parte* di 2, e significa ancora l'unità divisa in tre parti eguali, delle quali se ne sono prese due. È interessante di ben comprendere questo doppio significato delle frazioni per ciò che deve dirsi in seguito.

Il precedente ragionamento potendo applicarsi ad un'altra qualunque divisione dell'unità in cinque, sei, sette etc. parti

rappresenta anche la quarta parte di 3, ossia una delle quattro parti eguali nelle quali si suppone diviso il numero 3, e quindi prendere tre quarti di un ducato, è lo stesso che prendere un quarto di tre ducati. E poichè tre ducati valgono 300 grana, dividendo questo numero per 4, si ottiene per quoziente 75 come sopra.

Da quanto precede risulta che, *deve intendersi per frazione, una espressione numerica rappresentante una parte più o meno grande dell'unità.*

§. 12.

Cosa significano numeratore, e denominatore, frazione vera, e frazione spuria.

In ogni frazione si considerano, come abbiamo veduto, due numeri. Si chiama *denominatore* il numero inferiore che dinota in quante parti si è divisa l'unità, e *numeratore*, l'altro che indica quante parti se ne sono prese. Per esempio nella frazione $\frac{3}{4}$ il denominatore è 4, ed indica che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali, ed il numeratore è 3, ed indica che se ne sono prese tre. Il numeratore ed il denominatore insieme considerati, si chiamano i *termini* della frazione.

Le frazioni traendo la loro origine dal resto della divisione che è minore del divisore, dovrebbero avere il numeratore sempre minore del denominatore, ed essere perciò sempre minori dell'unità. Ma ritengono il nome di frazione ancora quelle che hanno il numeratore eguale o maggiore del denominatore. Le medesime si chiamano però frazioni *spurie* per distinguerle dalle prime che si chiamano frazioni *vere*, o *legittime*.

Una frazione qualunque che ha il numeratore eguale al denominatore, per poco che si esamini il suo significato, si troverà sempre eguale all'unità. Per esempio $\frac{4}{4}$ significa che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali delle quali se ne sono prese quattro, cioè si sono prese tutte, e per conseguenza il valore della frazione è la stessa unità. Ciò vien confermato ancora dall'osservazione che la frazione $\frac{4}{4}$ rappresenta la quarta parte di 4, e questa quarta parte si ottiene dividendo 4 per 4 (§. 9), la quale divisione dà per quoziente l'unità. Lo stesso ragionamento potrebbe applicarsi alle frazioni $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ etc., onde in generale ciascuna delle frazioni seguenti può considerarsi come l'espressione dell'unità,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}, \frac{10}{10} \text{ etc.}$$

Le frazioni spurie che hanno il numeratore maggiore del de-

numeratore sono maggiori dell'unità. Per esempio nella frazione $\frac{5}{4}$, il denominatore dinota che l'unità è stata divisa in quattro parti eguali; e siccome di queste parti non se ne possono prendere più di quattro, così essendo il numeratore 5 maggiore di 4, bisogna supporre che due unità siano state divise ognuna in quattro parti eguali, e per formare la frazione $\frac{5}{4}$ si siano prese tutte le parti della prima unità, ed una delle parti della seconda. La frazione $\frac{5}{4}$ è dunque maggiore dell'unità, e questa conseguenza si rileva ancora dal riflettere che $\frac{1}{4}$ rappresenta la quarta parte di 5, la quale si ottiene dalla divisione di 5 per 4, che dà per quoziente $1\frac{1}{4}$ (§. 9, e §. 11). Così pure la frazione $\frac{8}{4}$ rappresenta la quarta parte di 8, la quale si ottiene con la divisione di 8 per 4, che dà per quoziente 2; e quindi la frazione $\frac{8}{4}$ è la stessa cosa dell'intero 2.

Da ciò possiamo ancora stabilire che una frazione non è altro che una divisione accennata e non eseguita, nella quale il dividendo è rappresentato dal numeratore della frazione, ed il divisore dal denominatore. Per le frazioni vere la divisione non può eseguirsi e rimane indicata, e per le frazioni spurie, se si esegue, la frazione si cambia in un intero, o in un intero unito ad una frazione.

§. 13.

Tavola rappresentante i cambiamenti che si operano su di una frazione, moltiplicando o dividendo uno de' suoi termini.

Accrescendo il numeratore di una frazione senza alterare il suo denominatore, si accresce la frazione, poichè si prende un numero maggiore di parti dell'unità, e diminuendo il numeratore si diminuisce la frazione, perchè se ne prende un numero minore. Così $\frac{3}{4}$ è maggiore di $\frac{2}{4}$, perchè delle quattro parti in cui è divisa l'unità se ne prendono tre in vece di due, ed $\frac{2}{4}$ è minore di $\frac{3}{4}$, perchè si prende una sola parte delle quattro in cui è divisa l'unità in vece di prenderne due.

Nello stesso modo raddoppiando il numeratore si raddoppia la frazione, perchè si prende un numero doppio di parti dell'unità, triplicando il numeratore si triplica la frazione etc. Per esempio le frazioni $\frac{4}{10}$ e $\frac{8}{10}$ sono la prima doppia, e la seconda trippla di $\frac{2}{5}$. Viceversa prendendo la metà del numeratore, si prende la metà della frazione, prendendone la terza parte, si prende la terza parte della frazione etc. In fatti essendo la frazione $\frac{4}{10}$

doppia di $\frac{2}{10}$, sarà al contrario $\frac{2}{10}$ metà di $\frac{4}{10}$, come il numeratore 2 è metà del numeratore 4, e similmente sarà $\frac{2}{10}$ terza parte di $\frac{6}{10}$, come 2 è terza parte di 6 etc. Dunque in generale, *moltiplicando* il numeratore di una frazione per 2 per 3, o per qualunque altro numero, la frazione rimane *moltiplicata* per lo stesso numero, e *dividendo* il numeratore, la frazione rimane *divisa*.

L'opposto accade rispetto al denominatore delle frazioni. Accrescendo il denominatore di una frazione, e non alterando il suo numeratore, si diminuisce la frazione, perchè accrescendo il denominatore si accresce il numero delle parti in cui è divisa l'unità, onde ciascuna parte diviene più piccola; e diminuendo il denominatore, si diminuisce il numero delle parti in cui è divisa l'unità, e ciascuna parte diviene più grande. Per esempio debba dividersi un ducato in quattro parti eguali, ovvero a quattro persone; spetterà a ciascuna persona la frazione $\frac{1}{4}$ di ducato, e siccome il ducato è composto di 100 grana, spetteranno a ciascnno 25 grana. Debba poi dividersi il ducato in cinque parti eguali, o a cinque persone; la porzione di ciascuno sarà $\frac{1}{5}$ di ducato, ovvero 20 grana. Crescendo dunque il numero delle parti in cui si è divisa l'unità, è diminuito il valore di ciascuna parte. La frazione $\frac{1}{5}$ è minore di $\frac{1}{4}$, ed in conseguenza anche $\frac{2}{5}$ è minore di $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ è minore di $\frac{3}{4}$ ec., poichè le frazioni $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{5}$ non sono che $\frac{1}{5}$ preso più volte; e così pure sono le frazioni $\frac{2}{4}$, e $\frac{3}{4}$ rispetto ad $\frac{1}{4}$.

Raddoppiando il denominatore di una frazione, si raddoppia il numero delle parti in cui è divisa l'unità, onde il valore di ciascuna parte diviene la metà di quello che era prima, e quindi tutta la frazione rimane divisa per metà. Per esempio, debba distribuirsi una libbra di carne a tre soldati, in una circostanza di scarsezza di viveri. Siccome la libbra è composta di 12 once, spetterà a ciascun soldato $\frac{1}{3}$ di libbra, ossia 4 once di carne. Diminuendo sempre più le provvisioni, si supponga che in seguito debba distribuirsi una libbra di carne a sei soldati in vece di tre; spetterà allora a ciascun soldato $\frac{1}{6}$ di libbra, ossia 2 once di carne. La frazione $\frac{1}{6}$ è dunque metà di $\frac{1}{3}$, mentre il denominatore 6 è doppio del denominatore 3. In conseguenza anche $\frac{2}{6}$ è metà di $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{6}$ è metà di $\frac{3}{3}$. Triplicando il denominatore, la frazione diviene la terza parte di quello che era prima. Così $\frac{1}{9}$ è la terza parte di $\frac{1}{3}$, come risulta pure dal-

L'esempio proposto, giacchè $\frac{1}{2}$ di libbra vale 2 oncie, mentre $\frac{1}{4}$ vale 6 oncie. Dunque in generale *moltiplicando* il denominatore di una frazione per un certo numero, si viene a *dividere* la frazione per lo stesso numero. Viceversa dividendo il denominatore di una frazione per 2, per 3, per 4 et la frazione rimane moltiplicata per quel numero. In fatti da ciò che si è detto pocanzi si rileva che $\frac{1}{2}$ è doppio di $\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{3}$ è triplo di $\frac{1}{9}$.

Dopo di ciò rimane dimostrata la seguente tavola,

Moltiplicando } il numeratore { si moltiplica } la frazione
 Dividendo } { si divide }

Moltiplicando } il denominatore { si divide } la frazione
 Dividendo } { si moltiplica }

§. 14.

Non si altera il valore di una frazione se si moltiplicano, o si dividono i suoi termini per un medesimo numero.

Si abbia per esempio la frazione $\frac{4}{7}$. Moltiplicando per 2 ossia raddoppiando il suo numeratore, si raddoppia la frazione (§. 13), e perciò la frazione $\frac{8}{7}$ è doppia della frazione $\frac{4}{7}$, ed al contrario $\frac{4}{7}$ è metà di $\frac{8}{7}$. Moltiplicando per 2 il denominatore della frazione $\frac{8}{7}$, si divide per metà questa frazione (§. 13), onde la nuova frazione $\frac{8}{14}$ è metà di $\frac{8}{7}$. Ma $\frac{4}{7}$ è pure la metà di $\frac{8}{7}$, dunque $\frac{4}{7}$, ed $\frac{8}{14}$ sono la stessa cosa; e ciò è avvenuto perchè la frazione $\frac{4}{7}$ si è prima moltiplicata, e poi si è divisa per lo stesso numero 2, per cui il suo valore è rimasto inalterato, e solo la sua forma è cambiata.

Un simile risultato si otterrebbe moltiplicando i due termini della frazione per qualunque altro numero. Così $\frac{4}{7}$ è la stessa cosa di $\frac{12}{21}$, oppure $\frac{16}{28}$, $\frac{20}{35}$ etc.

Viceversa essendo data la frazione $\frac{16}{20}$, se il numeratore ed il denominatore di essa si dividono per 4, si avrà la frazione $\frac{4}{5}$, la quale per ciò che ora si è detto è eguale a $\frac{16}{20}$. E perciò se i termini di una frazione si dividono per uno stesso numero, neppure cambia di valore la frazione.

Modo di ridurre una frazione a più semplice espressione.

Per ciò che precede una frazione può avere infinite forme diverse, conservando lo stesso valore: per esempio, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \frac{11}{22}, \frac{12}{24}$ etc.

Sono frazioni che hanno tutte lo stesso valore, ma diversa forma, e si ottengono moltiplicando i termini della frazione $\frac{1}{2}$ per 2, 3, 4 etc., successivamente.

Fra queste frazioni si osserva che la prima ha la forma più semplice di tutte; e che una delle altre si può ridurre alla prima, dividendo i suoi termini per uno stesso numero, la quale operazione non ne altera il valore. Sia data la frazione $\frac{12}{24}$ da ridursi ad una espressione più semplice. Si comincerà a dividere il numeratore ed il denominatore per 2, e si avrà $\frac{6}{12}$, si continuerà a dividere per 2 i termini di questa frazione, e si avrà $\frac{3}{6}$, e dividendo per 3 i termini di quest'ultima, si otterrà in fine la frazione $\frac{1}{2}$.

Dunque una frazione si riduce ad espressione più semplice cercando un numero che sia divisore esatto tanto del numeratore che del denominatore, e dividendo i termini della frazione per questo numero. Quanto più grande sarà il comune divisore, la frazione sarà ridotta ad un'espressione più semplice. Così dividendo i termini della frazione $\frac{12}{24}$ per 2, si ha la frazione $\frac{6}{12}$, dividendoli per 4, si ha $\frac{3}{6}$, e finalmente dividendoli per 3 si ha $\frac{1}{2}$.

È chiaro poi che la frazione sarà ridotta alla sua più semplice espressione quando fra il suo numeratore ed il suo denominatore non vi sarà alcun divisore comune maggiore dell'unità, poichè se ve ne fosse un altro maggiore, dividendo i termini della frazione per questo numero, la frazione prenderebbe una forma più semplice ancora. Per esempio $\frac{3}{6}$ non è la forma più semplice della frazione $\frac{12}{24}$, poichè fra il numeratore ed il denominatore di $\frac{3}{6}$ vi è il divisore comune 3 pel quale divisi i termini della frazione, si ottiene l'ultima espressione $\frac{1}{2}$.

§. 16.

Regole per conoscere quando un numero è divisibile per 2, per 5, per 3, o per 9.

Per rendere più agevole la riduzione di una frazione alla più semplice espressione, giova dare alcune regole per conoscere a primo aspetto se i suoi termini siano divisibili esattamente pei numeri semplici 2, 5, 3, e 9.

Qualunque numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è divisibile esattamente per 2, perchè nell'eseguire la divisione, il penultimo resto sarà necessariamente zero, oppure 1, e quindi, calando l'ultima cifra, l'ultimo dividendo parziale sarà uno de' numeri 0, 2, 4, 6, 8, oppure 10, 12, 14, 16, 18, i quali numeri sono tutti divisibili per 2. Per esempio debba dividersi 4568 per 2, l'operazione sarà la seguente,

$$\begin{array}{r}
 4568 \\
 2 \overline{) 4568} \\
 \underline{4} \\
 5 \\
 \underline{4} \\
 16 \\
 \underline{16} \\
 0
 \end{array}$$

Ultimo dividendo parziale. 8
8
—
0

dove il penultimo resto è stato zero, e l'ultimo dividendo parziale è stato 8.

I numeri divisibili per 2 si chiamano numeri *pari*, perchè possono dividersi esattamente in due parti eguali. Tutti gli altri numeri si dicono *dispari*. Questi numeri non sono divisibili esattamente per 2, e per nessun altro numero pari.

I numeri che terminano o con zero, o con 5 sono esattamente divisibili per 5, poichè il penultimo resto della divisione dev'essere necessariamente uno de' numeri 0, 1, 2, 3, 4, e perciò l'ultimo dividendo parziale dev'essere uno de' numeri 0, 10, 20, 30, 40, oppure 5, 15, 25, 35, 45, i quali numeri sono tutti divisibili per 5. Per esempio dividendo per 5 il numero 585, il penultimo resto della divisione è 3; per conseguenza l'ultimo dividendo parziale è 35, il quale numero è esattamente divisibile per 5.

$$\begin{array}{r}
 585 \\
 5 \overline{) 585} \\
 \underline{5} \\
 8 \\
 \underline{5} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 00
 \end{array}$$

Se la somma delle cifre significative di cui si compone un numero qualunque è divisibile per 3 o per 9, il numero sarà ancora divisibile per 3, o per 9. — Per esempio il numero 59310 è divisibile per 3 e per 9 perchè la somma delle sue cifre è 18 che si divide esattamente per 9. Per dimostrare questa regola si rifletta che dividendo per 3, o per 9 l'unità seguita da uno, o più zeri, si deve avere sempre per resto 1. Infatti il 10 si compone di 9 ed 1, il 100 si compone di 99 ed 1, il 1000 si compone di 999 e di 1, e così di seguito, ed è evidente che i numeri, 9, 99, 999 ec. sono esattamente divisibili per 3 e per 9. Se dunque i numeri 10, 100, 1000 ec. divisi per 3, o per 9 danno un resto 1, è chiaro che i numeri 20, 200, 2000 ec. daranno un resto 2, e gli altri 30, 300, 3000 ec. un resto 3, e così ogni numero formato da una cifra significativa seguita da zeri, se si divida per 3 o per 9 darà un resto eguale alla cifra significativa. Per esempio 50000 diviso, per 9 deve dare per resto 5.

Dopo di ciò il numero 59310 si suppone decomposto nei numeri,

50000	che diviso per 9 dà per resto 5
9000	che diviso per 9 dà per resto 9
300	che diviso per 9 dà per resto 3
10	che diviso per 9 dà per resto 1

Somma de' residui. 18

La somma de' residui delle divisioni parziali è 18, e corrisponde alla somma delle cifre significative. Dunque il numero 59310 diviso per 9 dà per resto la somma delle sue cifre significative, e perciò se questo resto contiene esattamente il 9, il numero proposto sarà esattamente divisibile per 9, come realmente si verifica del numero 59310. Questo numero è anche divisibile per 3, poichè la somma de' residui, 18, è divisibile esattamente per 3. In generale ogni numero divisibile per 9, è anche divisibile per 3, ma non ogni numero divisibile per 3 è divisibile per 9.

§. 17.

Cosa s'intende per numero primo.

Si chiama *numero primo* quel numero che non ha alcun divisore esatto all'infuori dell'unità, e di se stesso. La serie de' numeri primi è la seguente,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.

Si chiamano *numeri primi fra loro* quelli che non hanno

nessun divisore comune, sebbene ciascuno di essi non sia numero primo. Per esempio 22 e 15 non sono numeri primi, ma sono primi fra loro. Quando i termini di una frazione sono due numeri primi, oppure due numeri primi fra loro, la frazione non può ridursi ad espressione più semplice.

§. 18.

Ridurre una frazione a minimi termini per mezzo del massimo comune divisore.

Il metodo indicato nel §. 15 per ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, o come suol dirsi, ai suoi *minimi termini*, è spesso il più facile a praticarsi; ma riesce lungo ed incerto quando i termini della frazione sono numeri molto grandi, o quando i termini stessi hanno per divisore comune qualche numero primo di due o più cifre, che è difficile di rinvenire. Allora si adopera a preferenza il metodo del *massimo comune divisore*.

Si è già veduto che quanto maggiore è il numero pel quale si dividono i termini di una frazione, tanto più semplice è l'espressione alla quale essa si riduce. Per conseguenza se di tutti i divisori comuni al numeratore e al denominatore della frazione si cerchi il più grande, e si dividano i due termini per questo numero, la frazione sarà ridotta alla sua più semplice espressione.

Per trovare quel comune divisore maggiore di tutti gli altri, ovvero il *massimo comune divisore* fra il numeratore ed il denominatore di una frazione, si farà uso della regola seguente che si dimostra nell'Algebra.

Si divida il maggiore de' due termini della frazione pel minore, indi quest'ultimo pel resto della divisione; poi il divisore della seconda divisione pel resto della medesima; in seguito il divisore della terza divisione pel resto corrispondente, e così andando avanti. Si giungerà finalmente ad una divisione senza resto; il divisore di quest'ultima divisione esatta sarà il massimo comune divisore fra i due termini della frazione. Debba per esempio ridursi a minimi termini la frazione $\frac{637}{143}$. Si cercherà primieramente il massimo comune divisore fra i due numeri 637, e 143; l'operazione si registrerà come segue,

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 143 \\
 \underline{572} & \\
 65 & \\
 \hline
 143 & 65 \\
 \underline{130} & \\
 13 & \\
 \hline
 65 & 13 \\
 \underline{65} & \\
 00 &
 \end{array}$$

Il massimo comune divisore sarà 13, e dividendo i termini 637, e 143 per questo numero, si otterrà la frazione $\frac{49}{11}$, che è la più semplice espressione della frazione proposta, come si conosce chiaramente, riflettendo che i numeri 49, e 5 sono primi fra loro (§. 17).

§. 19.

Dell'addizione e della sottrazione delle frazioni.

Quando due o più frazioni hanno lo stesso denominatore, è chiaro che le parti di cui sono composte appartengono alla stessa divisione dell'unità, e sono perciò eguali. Così le frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{7}$, sono ambedue l'unione di più quinti, ossia l'unione di parti della stessa divisione dell'unità, e per conseguenza ognuna delle parti di cui è composta la prima frazione è eguale ad ognuna delle parti di cui è composta la seconda. Dopo questa osservazione l'addizione, e la sottrazione delle frazioni che hanno lo stesso denominatore non presenta alcuna difficoltà; poichè potrà prendersi la somma o la differenza de' loro numeratori, appunto come si sommano o si sottraggono i numeri composti di unità della medesima specie e grandezza; ed affinchè il risultato di questa operazione esprima ancora la specie o la natura delle unità ottenute, il denominatore comune alle due frazioni. Per esempio, come due ducati e tre ducati formano l'unione o la somma di cinque ducati, così pure due settimi e tre settimi formano la somma di cinque settimi. Similmente la somma delle due frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{7}$ sarà $\frac{5}{7}$, e la loro differenza sarà $\frac{1}{7}$.

Spesso dall'addizione di due o più frazioni risulta una frazione spuria, la quale può ridursi ad un intero più una frazione vera eseguendo la divisione del numeratore pel denominatore (§. 12). Questa operazione si chiama, *estrarre gl'interi da una frazione*.

§. 20.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

L'addizione o la sottrazione non possono eseguirsi sulle frazioni che hanno diverso denominatore. Poichè i loro numeratori sono composti di unità di diversa grandezza, nè possono con la

(a) Calcolare i numeri significa eseguire su i medesimi qualcheduna delle operazioni finora espòste, o di quelle che si esporranno in seguito.

somma o la sottrazione ridursi ad un sol numero ; nello stesso modo che se dovessero sommarsi 3 ducati con 6 grana , la somma non potrebbe esser rappresentata dal numero 9 , ma s'indicherebbe soltanto dicendo , *tre ducati , e sei grana*. In tal caso le frazioni prima di sommarsi si riducono allo stesso denominatore.

Due o più frazioni si riducono allo stesso denominatore moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto de' denominatori delle altre. Per esempio per ridurre le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{6}$ allo stesso denominatore , si moltiplicano i termini della prima per 12 , prodotto de' denominatori 3 , e 4 delle altre due ; i termini della seconda per 8 , prodotto de' denominatori 2 , e 4 ; ed i termini della terza per 6 , prodotto de' denominatori 2 , e 3. Con questa operazione le frazioni avranno per denominatore comune il prodotto de' tre denominatori 2 , 3 , 4 , nè cambieranno di valore , perchè i termini di ognuna sono moltiplicati per uno stesso numero. Le frazioni ridotte saranno , $\frac{8}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{12}$.

Quando i denominatori delle frazioni da ridursi non sono numeri primi fra loro , può trovarsi per le medesime un denominatore comune più piccolo del prodotto di tutti i denominatori , il quale suole essere per lo più un numero molto grande. Siano da ridursi allo stesso denominatore le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$. Riflettiamo che in generale può prendersi qualunque numero per denominatore comune di queste frazioni , purchè sia divisibile esattamente per ciascuno de' loro denominatori. In fatti una frazione qualunque , per esempio $\frac{2}{3}$, può subito cambiarsi in un'altra che abbia per denominatore un numero divisibile esattamente pel suo denominatore 3 , come 72 ; e ciò con moltiplicare i termini della frazione $\frac{2}{3}$ pel quoziente 24 della divisione di 72 per 3. Il denominatore della nuova frazione dovrà essere necessariamente 72 , perchè il divisore 3 moltiplicato pel quoziente 24 , deve riprodurre il dividendo 72 ; (§. 9.) e la frazione trasformata sarà $\frac{48}{72}$. Le quattro frazioni proposte potrebbero avere per denominatore comune il numero 72 , il quale è divisibile esattamente per ciascuno de' loro denominatori 3 , 4 , 6 , ed 8 ; ed il numero 48 godendo della medesima proprietà , potrebbe anche prendersi per comune denominatore delle frazioni medesime.

Ma per trovare un numero il quale sia il più piccolo denominatore comune che possa darsi alle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, moltiplichiamo il maggiore de' quattro denominatori , 8 , pe' numeri 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , ec. successivamente , ed avremo 8 , 16 , 24 , 32 ec. Fra questi numeri che sono tutti quelli che possono dividersi esattamente per 8 , e diconsi i *multipli* di 8

8, deve per necessità trovarsi il denominatore cercato, il quale, per ciò che si è detto, deve pure esser divisibile per 8. Per conoscerlo, basta ricordarsi che esso deve potersi dividere esattamente per ciascuno degli altri tre denominatori 3, 4, 6, e deve essere inoltre il più piccolo possibile. Il numero 24 adempie a queste due condizioni, giacchè nessun multiplo di 8 più piccolo di 24 può dividersi esattamente per 3, per 4, e per 6; dunque 24 è il comune denominatore cercato. Si divida 24 per ciascuno de' quattro denominatori 3, 4, 6, 8, e si otterranno i quozienti 8, 6, 4, 3. Moltiplicando rispettivamente per questi numeri i termini delle frazioni proposte $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, si avranno le altre $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, ridotte allo stesso denominatore.

§. 21.

Dell' addizione, e della sottrazione degl' intieri accompagnati da frazioni.

Quando deve eseguirsi l'addizione d' intieri e frazioni con intieri e frazioni, si comincia ad operare sulle frazioni. Debba per esempio sommarsi $13 \frac{2}{3}$ con $4 \frac{5}{7}$; si cominciano a ridurre le due frazioni allo stesso denominatore, per poterle sommare, ed esse divengono $\frac{14}{21}$ e $\frac{15}{21}$; indi la loro somma $\frac{29}{21}$, che è una frazione spuria, si riduce ad un intiero più una frazione vera (§. 19), e l' intiero ottenuto, si unisce alla somma degl' intieri. La somma totale sarà $18 \frac{8}{21}$.

La sottrazione si esegue pure prima sulle frazioni, e poi su gl' intieri, lo che non presenta alcuna difficoltà. Avviene però spesso che la frazione da sottrarsi sia maggiore di quella da cui deve togliersi. Per esempio debba togliersi $4 \frac{5}{7}$ da $13 \frac{2}{3}$; dopo ridotte le frazioni allo stesso denominatore, dalla frazione $\frac{14}{21}$ dovrebbe sottrarsi la frazione $\frac{15}{21}$; ma ciò non potendo effettuarsi, si aggiungerà alla frazione $\frac{14}{21}$ un' unità improntata dall' intiero 13. Questa unità equivale a $\frac{21}{21}$ (§. 12), ed in conseguenza $13 \frac{14}{21}$ è lo stesso di $12 \frac{29}{21}$, da cui tolto $4 \frac{15}{21}$, si avrà per residuo $8 \frac{14}{21}$.

§. 22.

La tavola del §. 13 serve per moltiplicare o per dividere una frazione qualunque per un numero intero.

Dovendo moltiplicare una frazione per un numero intero, la tavola del §. 13 ci presenta evidentemente due maniere di farlo, cioè moltiplicando il numeratore della frazione per l'intero, oppure dividendo il denominatore per lo stesso numero. La prima operazione sempre può eseguirsi, ma non così la seconda, poichè il denominatore potrebbe non essere esattamente divisibile pel numero dato. Sia per esempio da moltiplicarsi $\frac{4}{10}$ per 2; il prodotto sarà $\frac{8}{10}$, oppure $\frac{2}{5}$, secondochè si moltiplichi il numeratore, o si divida il denominatore della frazione per 2. Ma se dovesse moltiplicarsi $\frac{2}{9}$ per 2, il prodotto non potrebbe avere che la sola forma $\frac{4}{9}$, giacchè la divisione del denominatore 9 per 2 è inesatta.

La divisione di una frazione per un numero intero si effettuisce pure con la tavola del §. 13, moltiplicando il denominatore o dividendo il numeratore della frazione pel numero dato. Così $\frac{4}{9}$ diviso per 2, dà per quoziente $\frac{2}{9}$, oppure $\frac{4}{18}$; ma non potrebbe eseguirsi la divisione di $\frac{4}{7}$ per 3 dividendo il numeratore, onde in tal caso il quoziente può avere soltanto la forma di $\frac{4}{21}$, che si ottiene moltiplicando il denominatore della frazione per 3.

§. 23.

Della moltiplicazione di due frazioni.

Prima di passare alla moltiplicazione delle frazioni facciamo alcune riflessioni sulla moltiplicazione in generale.

1.^o Se nella moltiplicazione di due numeri si prenda la metà, la terza parte, la quarta parte etc. del moltiplicando, il prodotto diviene pure la metà, la terza parte, la quarta parte etc. di quello che era prima. Per esempio,

15 moltiplicato per 4 dà per prodotto 60,
e prendendo la terza parte del moltiplicando 15, si ha che,

5 moltiplicato per 4 dà per prodotto 20.

Il nuovo prodotto 20 è la terza parte del primo prodotto 60, perchè invece di ripetere quattro volte il numero 15, si è ripetuta quattro volte la sua terza parte 5.

2.^o Se si lascia intatto il moltiplicando, e si raddoppia, triplica etc. il moltiplicatore, il nuovo prodotto sarà doppio, triplo etc. del primo. Per esempio,

5 moltiplicato per 4 dà per prodotto 20,
e triplicando il moltiplicatore 4 si avrà che,

5 moltiplicato per 12 è eguale a 60.

Il nuovo prodotto 60 sarà triplo del primo prodotto 20, perchè il moltiplicando 5 si è preso un numero triplo di volte.

3.^o Finalmente se nella moltiplicazione di due numeri si divide il moltiplicando per 2, o per 3, o per 4 etc., e si moltiplica il moltiplicatore per lo stesso numero, il prodotto non rimane alterato da quello che era, poichè colla prima operazione si divide il prodotto per 2, o per 3, o per 4 etc., e colla seconda operazione si moltiplica il prodotto per lo stesso numero. Per esempio nella moltiplicazione de' numeri 15 e 4 si possono considerare tre prodotti,

1. ^o prodotto	2. ^o prodotto	3. ^o prodotto
15 moltiplicato per 4;	5 moltiplicato per 4;	5 moltiplicato per 12.

Il secondo prodotto è la terza parte del primo, perchè si è presa la terza parte del moltiplicando; onde viceversa il primo prodotto è triplo del secondo. Da un'altra parte il terzo prodotto è triplo del secondo, perchè avendo amendue lo stesso moltiplicando 5, si è nel terzo prodotto triplicato il moltiplicatore 4. Quindi tanto il primo che il terzo prodotto sono tripli del secondo, e perciò il primo prodotto è lo stesso del terzo. Dunque essendosi diviso per 3 il moltiplicando 15, e moltiplicato per 3 il moltiplicatore 4, il prodotto è rimasto lo stesso.

Passiamo ora alla moltiplicazione delle frazioni.

Sia da moltiplicarsi $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$, e consideriamo la frazione $\frac{4}{3}$ per moltiplicando, e la frazione $\frac{2}{3}$ per moltiplicatore. Per ciò che si è detto, il prodotto di $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$ deve rimanere lo stesso se si divida il moltiplicando $\frac{4}{3}$ per 3, e si moltiplichi per lo stesso numero 3 il moltiplicatore $\frac{2}{3}$. Per dividere $\frac{4}{3}$ per 3 moltiplichiamo il denominatore della frazione per 3, ed avremo $\frac{4}{9}$; e per moltiplicare $\frac{2}{3}$ per 3 dividiamo il denominatore per 3 (§. 22) ed avremo $\frac{2}{1}$, ovvero 2.

Il prodotto di $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$ è dunque lo stesso di quello di $\frac{4}{9}$ per 2.

Ma per moltiplicare una frazione per un intero si moltiplica il numeratore per l'intero, dunque

$\frac{4}{9}$ moltiplicato per $\frac{2}{1}$, ossia

$\frac{4}{9}$ moltiplicato per 2,

è eguale ad $\frac{8}{9}$.

Osservando che il numeratore della frazione $\frac{8}{9}$ non è altro

che il prodotto de' numeratori 4, e 2 delle due frazioni da moltiplicarsi, ed il denominatore 15 è il prodotto de' denominatori 5, e 3, si può stabilire la regola che *per moltiplicare fra loro due frazioni si deve moltiplicare il numeratore pel numeratore, ed il denominatore pel denominatore.*

Dall'operazione precedente si rileva ancora che il prodotto di $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{5}$ è eguale a $\frac{8}{15}$ diviso prima per 3, e poi moltiplicato per 2.

§. 24.

Il prodotto di due frazioni vere è sempre minore di ciascuno de' suoi fattori, per cui prende il nome di frazione di frazione.

Il prodotto di due frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{5}$ si ottiene, dividendo la frazione $\frac{4}{3}$ per 3, e moltiplicando il quoziente $\frac{4}{9}$ per 2 (§. 23). Ora poichè la frazione $\frac{4}{9}$ nasce dalla divisione di $\frac{4}{3}$ per 3, essa è la *terza parte* di $\frac{4}{3}$, e dovrà ripetersi tre volte per ottenere $\frac{8}{9}$; ma moltiplicando $\frac{4}{9}$ per 2 si ripete solo due volte, dunque il prodotto $\frac{8}{9}$ delle due frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$ contiene due volte $\frac{4}{9}$, mentre uno de' fattori $\frac{4}{3}$ la contiene tre volte, e perciò *il prodotto è minore di uno de' suoi fattori.* Con lo stesso ragionamento prendendo $\frac{2}{3}$ per moltiplicando, e $\frac{4}{3}$ per moltiplicatore, si dirà che il prodotto delle due frazioni si ottiene dividendo $\frac{2}{3}$ per 5, e moltiplicando il quoziente $\frac{2}{15}$ per 4, e perciò il prodotto $\frac{8}{15}$ deve essere minore anche di $\frac{2}{3}$. Ciò si verifica però quando le due frazioni da moltiplicarsi sono legittime; poichè se una di esse è spuria, il prodotto è sempre maggiore dell'altra, e la eguaglia soltanto nel caso che la frazione spuria abbia per valore l'unità. Per esempio dovendo moltiplicarsi $\frac{4}{3}$ per $\frac{4}{3}$, il prodotto è maggiore di $\frac{4}{3}$, perchè si ottiene prendendo la terza parte di $\frac{4}{3}$ e ripetendola quattro volte; e se dovesse moltiplicarsi $\frac{4}{3}$ per $\frac{3}{3}$ ossia per 1, il prodotto sarebbe eguale a $\frac{4}{3}$.

Esaminando attentamente il prodotto di due frazioni, si riconosce che il suo significato è quello di una *frazione di frazione*. In fatti moltiplicare $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$ significa prendere la terza parte di $\frac{4}{3}$, e ripeterla due volte, ossia prendere le due terze parti di $\frac{4}{3}$. Il prodotto $\frac{8}{9}$ rappresenta dunque i *due terzi* di $\frac{4}{3}$,

ovvero una frazione di $\frac{4}{7}$, e quindi una frazione di frazione. Similmente moltiplicare $\frac{2}{7}$ per $\frac{2}{4}$ significa prendere i $\frac{2}{4}$ di $\frac{2}{7}$, ed il prodotto $\frac{2}{7}$ è una frazione di $\frac{2}{7}$.

§. 25.

Moltiplicare un intero per una frazione.

Il prodotto di un intero per una frazione si esegue in un modo affatto simile a quello adoperato per moltiplicare due frazioni. Debba moltiplicarsi 4 per $\frac{2}{7}$. Per ciò che si è detto di sopra (§. 23) il prodotto di 4 per $\frac{2}{7}$ non si altera se si divida per 3 il moltiplicando 4, e si moltiplichi per lo stesso numero il moltiplicatore $\frac{2}{7}$. Il prodotto di 4 per $\frac{2}{7}$ potrà dunque cambiarsi in quello di $\frac{4}{3}$ per 2, il quale pel §. 22 sarà $\frac{8}{7}$. Quindi *per moltiplicare un intero per una frazione, deve moltiplicarsi l'intero pel numeratore, e scrivere il denominatore sotto al prodotto ottenuto.*

Questa regola si confonde con quella data nel §. 22 per moltiplicare una frazione per un intero; per cui si può concludere che il prodotto di un intero per una frazione, sia lo stesso di quello della frazione per l'intero, malgrado che il significato di queste due operazioni sia in apparenza diverso. Moltiplicare $\frac{2}{7}$ per 4 significa ripetere quattro volte la frazione $\frac{2}{7}$, e moltiplicare 4 per $\frac{2}{7}$ significa prendere i due terzi di 4.

Dalla regola assegnata nel §. 23 per moltiplicare due frazioni apparisce similmente che il loro prodotto debba rimauere lo stesso, quantunque si cambi l'ordine de' fattori. Dunque ciò che si è detto nel §. 8 pe' numeri interi si verifica ancora per le frazioni, e può in generale stabilirsi che, *il prodotto di due numeri interi o frazionarii rimane lo stesso, se si prenda il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore.*

§. 26.

Ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione.

Per la moltiplicazione e per la divisione delle frazioni unite ad interi, occorre spesso di ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione. Debba ridursi 4 $\frac{2}{7}$ ad una sola frazione. Riflettiamo che ogni unità contenuta nel numero 4 può mettersi sotto la forma di $\frac{7}{7}$; onde il 4 equivale alla frazione $\frac{28}{7}$ ripetuta

ta quattro volte , ossia alla frazione $\frac{2}{3}$, che sommata con $\frac{2}{3}$, produce la frazione unica $\frac{4}{3}$ corrispondente a $4 \frac{2}{3}$. Dunque per ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione , si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione , al prodotto si aggiunge il numeratore , e si scrive sotto al risultato il denominatore.

Questa operazione è evidentemente l'inversa di quella di estrarre gl' interi da una frazione , accennata nel §. 19.

§. 27.

Della moltiplicazione delle frazioni unite agl' interi.

Le frazioni unite agl' interi si moltiplicano con le stesse regole precedenti , avvertendo di ridurre prima ad una sola frazione qualunque fattore composto d' un intero e di una frazione (§. 26). Per esempio debba moltiplicarsi $14 \frac{2}{3}$ per $4 \frac{3}{4}$; si ridurrà $14 \frac{2}{3}$ ad una sola frazione , e si avrà $\frac{44}{3}$, si ridurrà similmente $4 \frac{3}{4}$ ad una frazione e si avrà $\frac{19}{4}$, e si moltiplicheranno indi fra loro le due frazioni $\frac{44}{3}$ e $\frac{19}{4}$ che daranno per prodotto $\frac{77 \times 19}{3 \times 4}$ ovvero $\frac{1463}{12}$, da cui estratti gl' interi si avrà $62 \frac{7}{12}$. Questa operazione può anche eseguirsi moltiplicando ciascuna parte del moltiplicatore per ciascuna parte del moltiplicando , e sommando i varj prodotti ottenuti , come ne' tre seguenti esempj ,

$14 \frac{2}{3}$	$18 \frac{2}{7}$	121
$4 \frac{3}{4}$	20	$3 \frac{3}{4}$
56	360	363
$2 \frac{2}{3}$	$5 \frac{2}{7}$	$30 \frac{3}{4}$
$3 \frac{2}{3}$		
$\frac{2}{3}$	$365 \frac{2}{7}$	$393 \frac{3}{4}$
$62 \frac{7}{12}$		

Nel primo esempio il prodotto totale $62 \frac{7}{12}$, ovvero $62 \frac{2}{3}$ è composto di quattro prodotti parziali cioè , dell'intero del moltiplicatore per l'intero del moltiplicando , dell'intero del moltiplicatore per la frazione del moltiplicando , della frazione del moltiplicatore per l'intero del moltiplicando , ed in fine delle due frazioni fra loro. E deve pure osservarsi che per sommare le tre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{12}$, basta ridurre le prime due allo stesso de-

numeratore senza incaricarsi della terza, poichè il denominatore comune al quale si perviene, essendo il prodotto de' due denominatori 3, e 4, deve risultare lo stesso del denominatore della terza frazione.

§. 28.

Della divisione di un intiero per una frazione e viceversa.

Prima di parlare della divisione delle frazioni riflettiamo in generale che, *nella divisione di due numeri il quoziente non si altera, se tanto il dividendo che il divisore si moltiplicano per uno stesso numero.* Per esempio debba dividersi 24 per 6, il quoziente sarà 4, e rimarrà lo stesso, se si raddoppi tanto il dividendo 24 che il divisore 6; poichè raddoppiando il solo dividendo, il quoziente diviene evidentemente doppio, e raddoppiando il solo divisore, il quoziente diviene metà; raddoppiando dunque tanto il dividendo, che il divisore, il quoziente diviene prima doppio, e poi metà del doppio, ed in conseguenza rimane lo stesso.

Posto questo principio, sia da dividersi 4 per $\frac{2}{3}$. Il quoziente deve rimanere lo stesso moltiplicando il dividendo 4 ed il divisore $\frac{2}{3}$ ambedue per 3. Per moltiplicare la frazione $\frac{2}{3}$ per 3 dividiamo il suo denominatore, ed avremo $\frac{2}{1}$ ovvero 2; e quindi,

4 diviso per $\frac{2}{3}$ è lo stesso che

12 diviso per 2, ovvero $\frac{12}{2}$

E poichè il numero 12 è il prodotto dell' intiero dato pel denominatore della frazione, si potrà stabilire che, *per dividere un intiero per una frazione, si moltiplica l' intiero pel denominatore della frazione, e si divide pel numeratore.*

Viceversa dovendo dividersi la frazione $\frac{2}{3}$ per 4 si farà uso della regola assegnata al §. 22.

§. 29.

Della divisione di una frazione per un' altra.

Sia da dividersi la frazione $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$; la frazione $\frac{4}{3}$ sarà il dividendo, e la frazione $\frac{2}{3}$ il divisore. Per ciò che si è detto, il quoziente di una divisione rimane lo stesso, se il dividendo ed il divisore si moltiplicano per uno stesso numero. Moltiplichiamo tanto il dividendo $\frac{4}{3}$ che il divisore $\frac{2}{3}$ per 3. Per moltiplicare $\frac{4}{3}$, moltiplichiamo il suo numeratore per 3, ed avremo $\frac{12}{3}$, e per

moltiplicare $\frac{2}{3}$, dividiamo il suo denominatore per 3 ed avremo $\frac{2}{1}$, ovvero 2. Dunque

$$\frac{4}{3} \text{ diviso per } \frac{2}{3} \text{ è lo stesso che } \frac{2 \cdot 2}{3} \text{ diviso per } 2$$

Si esegua questa divisione con moltiplicatore il denominatore 5 per 2, e si avrà per risultato $\frac{2 \cdot 2}{10}$.

Osservando che il numeratore 12 di quest'ultima frazione è il prodotto del numeratore della frazione dividendo pel denominatore della frazione divisore, ed il denominatore 10 è viceversa il prodotto del denominatore della frazione dividendo pel numeratore della frazione divisore, si può stabilire la regola, *che per dividere una frazione per un'altra, si capovolge la frazione divisore, e si moltiplica per la frazione dividendo.*

È notabile che quando le frazioni da dividersi una per l'altra hanno lo stesso denominatore, il quoziente si ottiene con la divisione del numeratore della frazione dividendo per quello della frazione divisore. In fatti dovendo per esempio dividersi $\frac{2 \cdot 2}{10}$ per $\frac{2 \cdot 0}{10}$, il quoziente, secondo la regola precedente, sarà eguale al prodotto delle due frazioni $\frac{2 \cdot 2}{10}$ e $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 0}$, ovvero alla frazione,

$$\frac{12 \text{ moltiplicato per } 15}{15 \text{ moltiplicato per } 10}$$

che si riduce chiaramente a $\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 0}$, per essere il numero 15 fattore comune al numeratore ed al denominatore, pel quale possono dividersi i termini della frazione senza alterarla.

A questa conseguenza poteva anche giungersi direttamente riflettendo che le due frazioni $\frac{2 \cdot 2}{10}$ e $\frac{2 \cdot 0}{10}$, siccome hanno lo stesso denominatore, sono composte di parti della medesima grandezza (§. 20), onde per conoscere quante volte la frazione divisore è contenuta nella frazione dividendo, basta conoscere quante volte il numero delle parti che compongono la frazione divisore è contenuto nel numero delle parti simili che compongono la frazione dividendo, o ciò che vale lo stesso, basta dividere il numeratore 12 pel numeratore 10. Il quoziente di questa divisione non dipende dalla grandezza delle parti che compongono il dividendo ed il divisore, e rimane lo stesso se si cambia a piacere il denominatore comune delle due frazioni. Ciò si rende anche più chiaro con un esempio; 5 ducati sono contenuti in 20 ducati quattro volte al pari di 5 carlini in 20 carlini, e di 5 grana in 20 grana, malgrado che le unità componenti i numeri 20 e 5, siano di diversa grandezza in ciascuna delle tre divisioni.

Della divisione delle frazioni unite agl' interi.

Quando il dividendo, o il divisore, oppure ambedue sono composti di un intero e di una frazione, prima di eseguire la divisione si riduce l'intero e la frazione ad una sola frazione (§. 26). Per esempio dovendo dividersi $4\frac{1}{4}$ per $2\frac{2}{7}$, si riduce $4\frac{1}{4}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{17}{4}$; si riduce del pari $2\frac{2}{7}$ ad una sola frazione, e si ha $\frac{16}{7}$; dopo di ciò si dividono le due frazioni $\frac{17}{4}$ ed $\frac{16}{7}$ una per l'altra, come insegna la regola del §. precedente.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

Origine delle frazioni decimali.

Il sistema decimale di numerazione (§. 2) dà origine ad una specie di frazioni, di cui il calcolo, sebbene dipenda dalle regole esposte di sopra per le frazioni in generale, offre però alcune agevolazioni importanti che derivano dal modo particolare in cui si suppone divisa l'unità.

Come ne' numeri intieri progredendo dalla sinistra verso la destra, ogni unità contiene dieci volte la sua vicina, per esempio un migliajo contiene dieci centinaja, un centinajo contiene dieci decine ed una decina contiene dieci unità semplici: così continuando la progressione delle unità sempre dieci volte più piccole una dell'altra, si è considerata l'unità semplice composta di dieci parti eguali, ognuna delle quali è un *decimo* della unità medesima; il decimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è per conseguenza la decima parte di un decimo ossia un *centesimo* dell'unità; il centesimo composto di dieci parti eguali, ognuna delle quali è la decima parte di un centesimo, ovvero un *millesimo* dell'unità, e così di seguito. Queste frazioni si chiamano *decimali* perchè hanno origine dalla divisione successiva dell'unità, e delle sue parti sempre in dieci altre parti più piccole.

§. 32.

Maniera di scrivere le frazioni decimali, e loro relazione con le frazioni ordinarie.

Le frazioni, un *decimo*, un *centesimo*, un *millesimo*, un *diecimillesimo* etc. costituiscono, come abbiamo veduto, una progressione di unità delle quali ciascuna ha un valore sempre dieci volte minore della precedente, e perciò possono scriversi una alla destra dell'altra, come si fa de' numeri intieri per le diverse classi di unità andando dalla sinistra verso la destra. Si situeranno dunque i decimi alla destra degl'intieri, i centesimi alla destra de' decimi, i millesimi alla destra de' centesimi ec., separando con una virgola gl'intieri dalle frazioni decimali. La progressione generale delle unità intiere e frazionarie conterrà perciò due progressioni che cominciano dall'unità semplice, e si estendono indefinitamente, una verso la sinistra, e l'altra verso la destra, come quì sotto,

etc.	1	1	1	1	1,	1	1	1	1	etc.
	decina di migliajo	migliajo	centinajo	decina	unità	decimo	centesimo	millesimo	diecimillesimo	

Da questa serie apparisce chiaramente che le frazioni decimali si compongono le une per mezzo delle altre appunto come i numeri intieri. Così un decimo contiene 10 centesimi, ovvero 100 millesimi, ovvero 1000 diecimillesimi ec.; un centesimo contiene 10 millesimi, ovvero 100 diecimillesimi, ovvero 1000 centomillesimi ec.; un millesimo contiene 10 diecimillesimi, ovvero 100 centomillesimi ec.

Dopo di ciò sarà facile scrivere qualunque *decimale*, intendendo con questa parola una frazione decimale, oppure un intiero unito ad una frazione decimale. Per esempio 5 $\frac{1}{4}$ intieri e 25 centesimi si scriveranno così, 5 $\frac{25}{100}$; dove si è situata la cifra 2 nel luogo de' decimi, perchè 20 centesimi sono la stessa cosa di due decimi. Similmente 325 diecimillesimi si scrivono così, 0,0325; dove mancando gl'intieri e i decimi, si è supplito il luogo de' primi con uno zero, per poter situare la virgola che separa gl'intieri da' decimali, ed il luogo de' secon-

di con un altro zero, per conservare ai diecimillesimi il quarto luogo dopo la virgola; e si sono anche poste le cifre 3, e 2 nel secondo e nel terzo luogo, perchè 300 diecimillesimi sono lo stesso di 3 centesimi, e 20 diecimillesimi sono lo stesso di 2 millesimi. Dunque volendo scrivere qualunque decimale, dovrà separarsi la parte intera dalla frazionaria con la virgola, e scrivere poi la frazione decimale come se fosse un intero, avendo l'avvertenza di situare l'ultima cifra a destra nel luogo che le compete secondo la sua denominazione, e di riempire con zeri i luoghi vuoti dopo la virgola, se ve ne sono. Mancando gl'interi si scriverà uno zero avanti la virgola.

La pratica di scrivere i decimali guida anche alla lettura de' medesimi. Così 59,0063 si legge, *cinquantanove, e sessantatre diecimillesimi*; e 0,000063 si pronunzia *sessantatre millionesimi*.

Paragonando i decimali

- 1.^o 54,25
- 2.^o 0,0325
- 3.^o 59,0063
- 4.^o 0,000063

scritti sotto forma d'interi, con le espressioni equivalenti,

- 1.^a $54 \frac{25}{100}$, ovvero $\frac{5425}{100}$,
- 2.^a $\frac{325}{10000}$
- 3.^a $59 \frac{63}{10000}$, ovvero $\frac{590063}{10000}$,
- 4.^a $\frac{63}{1000000}$

scritte sotto forma di frazioni ordinarie, si vede subito che il numeratore di ognuna delle frazioni ordinarie non è altro che il decimale corrispondente in cui si è soppressa la virgola, ed il denominatore è formato dall'unità seguita da tanti zeri quante cifre contiene il decimale corrispondente dopo la virgola. Oude potranno stabilirsi le seguenti regole generali; per rappresentare un decimale sotto forma di frazione ordinaria, bisogna dare per denominatore alle cifre che esso contiene l'unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali si contano dopo la virgola, la quale si sopprime; e viceversa per ridurre sotto forma intera una frazione ordinaria che ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri, si sopprime questo denominatore, e nel numeratore si situa la virgola in modo che rimangano separate tante cifre decimali, quanti zeri si contavano nel denominatore della frazione ordinaria.

§. 33.

Una frazione decimale non si altera se alla sua destra si aggiungano o si sopprimano uno o più zeri.

Sia data la frazione decimale $0,310$. La frazione ordinaria corrispondente sarà $\frac{310}{1000}$. Ora si sa che una frazione non cambia di valore, se i suoi termini si moltiplicano o si dividono per lo stesso numero. Perciò dividendo i termini della frazione $\frac{310}{1000}$ per 10, o moltiplicandoli per 10, 100 etc., si avranno le frazioni $\frac{310}{1000}$, $\frac{31}{100}$, $\frac{3100}{10000}$, $\frac{31000}{100000}$, tutte uguali fra loro; ed eguali fra loro saranno pure tutte le frazioni decimali corrispondenti $0,310$; $0,31$; $0,3100$; $0,31000$.

§. 34.

Dell'addizione de' decimali.

L'addizione de' decimali si esegue perfettamente come quella de' numeri intieri, poichè le parti decimali si compongono le une per mezzo delle altre nello stesso modo delle unità intere (§. 32). Deve solo aversi l'avvertenza di situare i numeri in modo che corrispondano i decimi sotto ai decimi, i centesimi sotto ai centesimi etc. Per esempio,

$$\begin{array}{r} 4,0301 \\ 13,03 \\ 24, \\ \hline 3,00002 \\ \hline 44,06012 \end{array}$$

§. 35.

Della sottrazione de' decimali.

La sottrazione de' decimali si esegue come quella de' numeri intieri, colla sola avvertenza di eguagliare per mezzo di zeri il numero delle cifre decimali del sottrattore, e del sottraendo quando occorre. Per esempio dovendo sottrarsi $24,0031$ da $35,03$ si aggiungeranno due zeri a quest'ultimo numero, e l'operazione si eseguirà come quì appresso

$$\begin{array}{r} 35,0300 \\ 24,0031 \\ \hline 11,0269 \end{array}$$

Così pure quando uno de' numeri non contenesse decimali. Per esempio debba sottrarsi 0, 3429 da 35 si farà

$$\begin{array}{r} 35, 0000 \\ 0, 3429 \\ \hline 34, 6571 \end{array}$$

§. 36.

Alterazione che soffre un decimale variando di luogo la virgola.

Prendiamo per esempio il numero 34, 27. Trasportando la virgola un luogo più a destra si ha 342, 7; ed è chiaro che la cifra 2 che rappresentava decimi, rappresenta ora unità; la cifra 4 che rappresentava unità, rappresenta ora decine, e la cifra 3 che rappresentava decine rappresenta centinaia; e finalmente la cifra 7 a destra della virgola rappresentava centesimi, ed ora rappresenta decimi. Dunque ogni cifra del numero proposto è divenuta dieci volte maggiore, e perciò il numero stesso col cambiamento della virgola è divenuto dieci volte maggiore di quello che era prima. Trasportando la virgola due luoghi più a destra, si ha 3427. Questo numero è dieci volte maggiore di 342, 7, e cento volte maggiore di 34, 27. Dunque trasportando la virgola di un luogo verso la destra, il numero cresce dieci volte, trasportandola di due luoghi cresce cento volte etc.

Con un simile esame si vede subito che trasportando la virgola di un luogo a sinistra, trasportandola di due luoghi etc., il numero diminuisce dieci, cento, mille volte etc. Così il numero 3,427 è dieci volte minore di 34, 27; e l'altro 0,3427 è dieci volte minore di 3,427, e cento volte minore di 34, 27.

Un decimale in cui si sopprime la virgola, si cambia in un numero intero, e rimane con quella operazione moltiplicato per l'unità seguita da tanti zeri quante cifre si contavano a destra della virgola, ossia rimane moltiplicato pel denominatore della corrispondente frazione ordinaria. Per esempio sopprimendo la virgola nel decimale 3,47 corrispondente alla frazione ordinaria $\frac{347}{100}$, si ottiene il numero intero 347; il quale è 100 volte maggiore di 3,47 poichè tanto è sopprimere la virgola che trasportarla due luoghi a destra dopo l'ultima cifra 7. L'intero 347 è pure il numeratore della frazione ordinaria $\frac{347}{100}$, ed eguaglia la frazione medesima moltiplicata per 100, giacchè eseguendo questa moltiplicazione con dividere per 100 il denominatore della frazione, si ha $\frac{347}{1}$, ovvero 347. Dunque sopprimere la vir-

gola in un decimale significa sopprimere il denominatore nella frazione ordinaria che gli corrisponde.

Viceversa se voglia dividersi un intero o per l'unità seguita da uno o più zeri, basterà separare con una virgola tante cifre alla destra del numero quanti sono gli zeri. Così volendo dividere 347 per 1000, si scriverà 0,347, poichè questo decimale corrisponde a $\frac{347}{1000}$, ossia a 347 diviso per 1000. Lo stesso numero diviso per 10000 darebbe, 0,0347 corrispondente a $\frac{347}{10000}$ e diviso per 100000 darebbe 0,00347.

§. 37.

Della moltiplicazione de' decimali.

Per moltiplicare fra loro due decimali, si considera soppressa la virgola in ciascuno di essi, e si moltiplicano come se fossero numeri interi; indi nel prodotto ottenuto si separano tante cifre decimali quante ne contenevano insieme i due fattori. Così per moltiplicare 4,21 per 5,3, si moltiplica 421 per 53, e nel prodotto 22313 si separano tre cifre decimali, e si ottiene per risultato 22,313. È facile dar ragione di questo modo di operare. Le frazioni ordinarie corrispondenti ai decimali proposti 4,21, e 5,3 sono $\frac{421}{100}$, e $\frac{53}{10}$, il prodotto delle quali è eguale al prodotto de' numeratori diviso per quello de' denominatori (§. 23). Il prodotto de' numeratori è 22313 che nasce dalla moltiplicazione de' due decimali in cui si considera soppressa la virgola. Dunque se questo numero si divide per 1000, prodotto de' due denominatori 100, e 10, si avrà il prodotto cercato delle due frazioni ordinarie, ovvero de' decimali corrispondenti: per dividere 22313 per 1000, si separano tre cifre decimali (§. 36), quante ne contengono insieme i due fattori 4,21, e 5,3, e si ottiene 22,313, come porta la regola.

Per un altro esempio debba moltiplicarsi 0,0027 per 0,035; si farà come segue,

$$\begin{array}{r}
 0,0027 \\
 0,035 \\
 \hline
 135 \\
 81 \\
 \hline
 0,000945
 \end{array}$$

Della divisione de' decimali.

Per dividere un decimale per un altro, si eguaglia il numero delle cifre decimali del dividendo e del divisore per mezzo di zeri, si sopprime la virgola, e si esegue la divisione come su i numeri intieri.

Sia da dividersi $24,31$ per $2,327$. Si eguagli il numero delle cifre decimali del dividendo e del divisore, e si avrà $24,310$ da dividersi per $2,327$. Con questa operazione si sono ridotti i due decimali allo stesso denominatore, ed in fatti le frazioni ordinarie corrispondenti sono,

$$\frac{24310}{10000} \text{ da dividersi per } \frac{2327}{10000}.$$

Per eseguire la divisione di queste due frazioni che hanno lo stesso denominatore, si esegue la divisione de' loro numeratori (§. 29). Dunque,

$24,31$ diviso per $2,327$, è lo stesso che

$24,310$ diviso per $2,327$, ossia

24310 diviso per 2327

come porta la regola.

Eseguyendo questa divisione si avrà $10 \frac{2040}{2327}$ per quoziente.

§ 39.

Maniera di ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale.

La divisione de' decimali riducendosi a quella de' numeri intieri, come si è mostrato nel §. antecedente, il quoziente contiene per lo più una frazione ordinaria di un denominatore qualunque, la quale deve ridursi in frazione decimale, per avere il risultato dell'operazione espresso da un decimale, come il dividendo ed il divisore.

Per ridurre una frazione ordinaria qualunque in frazione decimale, ricordiamoci che le frazioni ordinarie rappresentano la divisione di un intiero per un altro, che non potendo eseguirsi, rimane soltanto indicata (§. 12). Così $\frac{3}{8}$ non significa altro che 3 diviso per 8, la quale divisione non potendo eseguirsi, rimane indicata sotto la forma di $\frac{3}{8}$. Ma si può col soccorso delle frazioni decimali eseguire la divisione indicata $\frac{3}{8}$. Infatti si supponga il numeratore 3 ridotto in 30 decimi, ed allora la divisione potrà eseguirsi, e si avrà per quoziente 3 decimi con un resto di 6 decimi. Riduciamo questo resto in 60 centesimi, e con-

tinuando la divisione, avremo un quoziente 7 centesimi, con un resto di 4 centesimi. Riduciamo questo resto in 40 millesimi, e continuando la divisione avremo un quoziente 5 millesimi senza resto. Dunque la divisione di 3 per 8 eseguita coll'ajuto delle frazioni decimali dà un quoziente composto di 3 decimi, 7 centesimi, e 5 millesimi, ossia dà per quoziente 0,375, e perciò la frazione $\frac{3}{8}$ eguaglia la frazione decimale 0,375, come può verificarsi riducendo a minimi termini la frazione $\frac{375}{1000}$. L'operazione descritta di sopra è la seguente,

$$\begin{array}{r} 3,0 \\ 8 \overline{) 24} \\ \underline{16} \\ 60 \\ 56 \\ \underline{40} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 0,375 \end{array}$$

Quindi, per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale basta dividere il numeratore pel denominatore, riducendo successivamente in decimi, centesimi, millesimi etc. le parti del numeratore medesimo, affin di poter eseguire la divisione.

Secondo questa regola volendo valutare in decimali la frazione annessa al quoziente di una divisione qualunque di decimali, o di numeri intieri, non deve farsi altro che continuare la divisione medesima, con aggiungere al resto uno zero, ed ottenendo un secondo resto aggiungervi un altro zero, e così di seguito, come può osservarsi nel seguente esempio,

$$\begin{array}{r} 91 \\ 8 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 11 \\ 8 \\ \underline{8} \\ \text{Resto} \dots 3,0 \\ 24 \\ \underline{16} \\ 60 \\ 56 \\ \underline{40} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 11,375 \end{array}$$

Devedo ridursi in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{7}{80}$, è da notare che il numeratore ridotto in decimi è ancora così piccolo, da non potersi eseguire la divisione, per cui deve ridursi in centesimi. Perciò nel quoziente non vi sono decimi, e bisogna scrivere uno zero nel loro luogo, come nell'operazione qui appresso.

$$\begin{array}{r}
 3,00 \\
 240 \\
 \hline
 600 \\
 560 \\
 \hline
 400 \\
 400 \\
 \hline
 000
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 80 \\
 \hline
 0,0375
 \end{array}$$

Similmente la frazione $\frac{3}{800}$ ridotta in decimali darebbe 0,00375.

§. 40.

Delle frazioni decimali periodiche.

Riducendo una frazione ordinaria in frazione decimale spesso si osserva che nel quoziente ritornano le stesse cifre. Per esempio $\frac{12}{37}$ sviluppata in frazione decimale dà, 0,324324324 etc. dove le cifre 324 sono ripetute di seguito ed all'infinito, giacchè nella divisione di 12 per 37 dopo le prime tre cifre del quoziente, si ha un resto 12, onde la divisione comincia da capo con lo stesso ordine sino ad aversi un secondo resto 12, e dopo tre altre cifre un terzo resto 12, e così all'infinito. Le frazioni decimali in cui le cifre sono ripetute in questo modo si chiamano *periodiche*, e le cifre che si ripetono, si chiamano il *periodo*. Così 0,324324324 etc. è una frazione periodica, ed il periodo è 324. Riducendo in decimali la frazione $\frac{1}{24}$ si ha 0,45454545 etc., ed il periodo è 45, e così di altre.

Le frazioni decimali periodiche non terminando mai, non rappresentano con esattezza le frazioni ordinarie da cui derivano. In fatti prendiamo per esempio la frazione $\frac{1}{3}$ che sviluppata in frazione decimale dà, 0,333333 etc. all'infinito. Se si cercasse di sapere dopo quale numero di cifre questa frazione decimale eguaglia esattamente la frazione $\frac{1}{3}$, esaminata attentamente la cosa, si vedrebbe che non la eguaglia mai. Poichè prendiamo una sola cifra, ed avremo 0,3, ovvero $\frac{3}{10}$, che potrà paragonarsi

ad $\frac{2}{3}$ con ridurre le due frazioni allo stesso denominatore; le frazioni ridotte saranno $\frac{9}{30}$ e $\frac{20}{30}$, da cui apparisce che la frazione decimale 0,3 è minore di $\frac{2}{3}$, e la differenza fra le due è $\frac{21}{30}$. Prendiamo due cifre, cioè 0,33 che corrisponde a $\frac{33}{100}$; le frazioni $\frac{9}{100}$ ed $\frac{2}{3}$ ridotte allo stesso denominatore si cambiano in $\frac{99}{1000}$ e $\frac{2000}{3000}$, ed il paragone di queste due ultime frazioni ci avverte che 0,33 è minore di $\frac{2}{3}$, e la differenza è $\frac{2}{300}$. Prendiamo tre cifre 0,333 e troveremo questa frazione anche minore di $\frac{2}{3}$, ma la differenza sarà di $\frac{2}{3000}$ soltanto. Continuando a questo modo, troveremo sempre la frazione decimale più piccola della frazione ordinaria, ma la differenza andrà pure sempre diminuendo, sino a ridursi piccolissima e trascurabile. Onde potremo concludere che, ogni frazione decimale periodica non può mai rappresentare con esattezza la frazione ordinaria da cui deriva, ma si accosta sempre più alla medesima, sino a differirne per una quantità piccolissima e trascurabile, a misura che si prende un maggior numero di cifre decimali.

§. 41.

Data una frazione decimale qualunque, trovare la frazione ordinaria corrispondente.

Se la frazione decimale non è periodica, non vi bisogna alcun artificio per trovare la corrispondente frazione ordinaria, e basta eseguire ciò che prescrive nel §. 32. Per esempio la frazione decimale 0,125 corrisponde alla frazione ordinaria $\frac{125}{1000}$, la quale ridotta a minimi termini si cambia in $\frac{1}{8}$. Ma se la frazione decimale è periodica, si farà nel modo seguente.

Osserviamo primieramente che le frazioni $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{99}$, $\frac{4}{999}$, etc. ridotte in frazioni decimali con la divisione, danno i seguenti sviluppi;

$\frac{2}{9}$	corrisponde a	0,222222 ec.
$\frac{3}{99}$		0,030303 ec.
$\frac{4}{999}$		0,004004001 ec.
$\frac{5}{9999}$		0,00050005 ec.

In queste frazioni periodiche il numero delle cifre del periodo va sempre crescendo; nella prima il periodo è composto della sola cifra 2, nella seconda il periodo è, 03, nella terza è 004 etc.

Ciò premesso, sia da ridursi in frazione ordinaria la frazione decimale periodica $0,33333$ etc., di cui il periodo è di una sola cifra. Riflettiamo che la frazione periodica $0,111111$ etc. moltiplicata per 3 dà per prodotto $0,33333$ etc., e perciò la frazione decimale proposta è tripla della frazione $0,111111$ etc. Quindi le frazioni ordinarie corrispondenti, dovranno essere anche una tripla dell'altra, cioè la frazione corrispondente a $0,33333$ etc. dovrà esser tripla di $\frac{1}{9}$ che corrisponde a $0,111111$ etc. Se dunque moltiplicheremo per 3 la frazione $\frac{1}{9}$, avremo la frazione ordinaria $\frac{3}{9}$ ovvero $\frac{1}{3}$, che sarà la frazione ordinaria corrispondente a $0,33333$ etc. Per un altro esempio, debba trovarsi la frazione ordinaria corrispondente a $0,454545$ etc. Prendiamo la frazione $0,010101$ etc. corrispondente ad $\frac{1}{99}$, e moltiplichiamola per 45, ossia pel periodo della frazione proposta; il prodotto sarà $0,45454545$ etc., ossia la stessa frazione proposta. Questa frazione è dunque 45 volte maggiore dell'altra $0,010101$ etc., e la stessa relazione dovendo verificarsi tra le frazioni ordinarie corrispondenti, se moltiplicheremo la frazione $\frac{1}{99}$ per 45, il prodotto $\frac{45}{99}$, ovvero $\frac{5}{11}$, sarà la frazione ordinaria corrispondente alla frazione decimale periodica $0,454545$ etc.

Allo stesso modo si ridurrà in frazione ordinaria, qualunque altra frazione decimale periodica, e solo dovrà avvertirsi di scegliere la frazione $0,001001001$ etc. se il periodo della frazione proposta è di tre cifre, l'altra $0,00010001$ etc. se il periodo è di quattro cifre etc.

Dunque per ridurre una frazione decimale periodica in frazione ordinaria, si prende il periodo per numeratore della frazione ordinaria, e se gli dà per denominatore un numero composto di tanti 9, quante sono le cifre del periodo.

Se la frazione decimale contenesse alcune cifre avanti di cominciare il periodo, si farebbe nel modo seguente. Per esempio debba ridursi in frazione ordinaria $0,3445454545$ etc. Osserviamo che vi sono le due cifre, 34 avanti al periodo, che è 45. *Trasportiamo la virgola immediatamente innanzi al periodo*, ed avremo $34,454545$ etc., e siccome $0,454545$ etc. è eguale a $\frac{5}{11}$, così il valore di $34,454545$ etc. sarà $34 \frac{5}{11}$. Ma questo numero è cento volte maggiore della frazione proposta, poichè corrisponde al decimale $34,454545$ etc. che si è ottenuto dalla frazione medesima trasportando in essa la virgola per due luoghi verso la dritta (§. 33). Dovrà dunque dividersi $34 \frac{5}{11}$ per 100, onde ottenere la frazione ordinaria corrispondente a $0,344545$ etc. Riduciamo $34 \frac{5}{11}$ ad una sola frazione, ed avre-

mo $\frac{379}{111}$, la quale frazione si dividerà per 100 moltiplicandone il denominatore per questo numero. La frazione $\frac{379}{11100}$ sarà in fine il vero valore della frazione decimale proposta 0,344544545 ec.

Fin qui abbiamo esposte le regole necessarie per eseguire le operazioni principali dell' Aritmetica su i numeri interi e frazionarii. Passiamo ora a ragionare della dottrina delle proporzioni, la quale ha un' applicazione estesissima in tutte le scienze matematiche, non meno che agli usi della società e del commercio.

DELLE PROPORZIONI

§. 42.

Di alcuni segni de' quali si fa uso nell' Algebra.

Premettiamo la conoscenza di alcuni segni de' quali si fa uso nell' Algebra per rendere più breve il discorso, poichè ci tornerà comodo adoperarli qualche volta d' ora innanzi.

Il segno $+$ indica addizione, e si pronunzia *più*. Così $4 + 7$ si legge, *quattro più sette*, e rappresenta la somma de' due numeri 4 e 7, per cui vale lo stesso che 11. Similmente $4 + 7 + 9$ si legge, *quattro più sette più nove*, e rappresenta la somma de' tre numeri 4, 7, e 9, ossia vale lo stesso che 20.

Il segno $-$ indica sottrazione, e si pronunzia *meno*.

$7 - 4$ si legge, *sette meno quattro*, e rappresenta il resto della sottrazione del numero 4 dal 7, ossia la differenza fra i due numeri 7, e 4, per cui equivale a 3.

Il segno $\times$ indica moltiplicazione, e si pronunzia *moltiplicato per*.

7×4 si legge, *sette moltiplicato per 4*, e rappresenta il prodotto de' due numeri 7 e 4, per cui equivale a 28.

$\frac{7}{4}$, oppure $7 : 4$, si pronunzia *sette diviso per 4*, e rappresenta il quoziente della divisione di 7 per 4.

Il segno $=$ dinota eguaglianza. L'uso di questo segno si può scorgere chiaramente nelle seguenti espressioni,

$$4 + 7 + 9 = 20$$

$$7 - 4 = 3$$

$$7 \times 4 = 28$$

$$7 : 4 = 1 \frac{3}{4}$$

le quali dipendono dalle cose dette di sopra.

Il segno $>$ indica maggioranza. Così $7 > 4$ dinota che 7 è maggiore di 4, e si pronunzia *sette maggiore quattro*.

Il segno $<$ indica minoranza. Per esempio $4 < 7$, si pronunzia *quattro minore sette*.

I segni di cui ora si è parlato possono combinarsi insieme per indicare più operazioni successive da eseguirsi sopra alcuni numeri. Così,

$$5 \times 4 + 2 = 3$$

indica che il 5 deve moltiplicarsi per 4, al prodotto deve aggiungersi 2, e dalla somma ottenuta deve togliersi 3. Eseguite tutte queste operazioni, si ha per ultimo risultato 19; per cui può stabilirsi l'uguaglianza,

$$5 \times 4 + 2 = 3 = 19.$$

§. 43.

Delle ragioni e delle proporzioni in generale.

Due numeri possono paragonarsi fra loro in due maniere diverse, cioè:

1.^o Osservando di quanto uno supera l'altro.

2.^o Osservando quante volte uno è contenuto nell' altro.

Per esempio, due amici paragonano fra loro il denaro che hanno in tasca; uno ha 4 ducati, e l'altro ne ha 12. Quello che ha 12 ducati può dire a quello che ne ha 4, *io posseggo 8 ducati più di voi*, e può dire ancora, *il mio denaro è triplo del vostro*.

Questa seconda maniera di paragonare i numeri dà una chiara idea di ciò che dicesi *rapporto o ragione geometrica di due numeri*.

Rapporto o ragione geometrica di due numeri è dunque il numero delle volte che uno contiene l' altro, o più generalmente il quoziente della divisione di uno per l'altro. Così il rapporto de' due numeri 10 e 5 è $\frac{10}{5}$, ovvero 2; ed il rapporto de' due numeri 10, e 7, è $\frac{10}{7}$. Il rapporto de' due numeri 3, e 4 dovendo essere il quoziente della divisione di 3 per 4, corrisponde alla frazione $\frac{3}{4}$ (§. 12). Da ciò si vede che, *una ragione geometrica può considerarsi in qualunque caso come una frazione spuria o come una frazione vera*.

Vi può essere fra due numeri lo stesso rapporto che fra due altri. Per esempio il rapporto de' due numeri 12, e 4, è lo stesso di quello degli altri due 18, e 6, perchè il quoziente della divisione di 12 per 3, è lo stesso del quoziente della divisione di 18 per 4. Quando ciò si verifica, i quattro numeri diconsi *in proporzione*, e quindi s'intende per *proporzione l'eguaglianza di due rapporti*.

Una proporzione essendo l'eguaglianza di due ragioni, corrisponde sempre all'eguaglianza di due frazioni spurie o vere.

Per verificare se quattro numeri sono in proporzione dovranno perciò formarsi le due frazioni corrispondenti alle due ragioni, e riconoscere se sono eguali. Possono darsi due casi: o le frazioni sono spurie, ma tali da ridursi ad un numero intero con la divisione, ed allora si verifica subito l'eguaglianza delle due ragioni; così si vede subito che la proporzione $4 : 2 :: 6 : 3$ è esatta, perchè ciascuna delle due ragioni $\frac{4}{2}$ e $\frac{6}{3}$ è eguale a 2.

In questo caso il primo de' quattro numeri contiene il secondo tante volte, quante il terzo contiene il quarto. O le frazioni non possono ridursi ad un numero intero con la divisione, ed allora per riconoscerne l'eguaglianza, bisogna ridurle alla loro più semplice espressione. Per esempio la proporzione $15 : 10 :: 9 : 6$ è esatta, perchè le frazioni $\frac{15}{10}$, e $\frac{9}{6}$ ridotte alla loro più semplice espressione corrispondono ambedue a $\frac{3}{2}$.

Un rapporto fra due numeri si scrive così, $4 : 6$, e si pronunzia *4 sta a 6*. Una proporzione si scrive così, $6 : 2 :: 12 : 4$, e si pronunzia, *6 sta a 2 come 12 sta a 4*. Il primo numero di un rapporto si chiama *antecedente*, ed il secondo, *conseguente*. Così nella ragione $6 : 2$ il numero 6 è l'antecedente, ed il numero 2 è il conseguente.

Una proporzione contenendo due ragioni, ha due antecedenti, e due conseguenti, i quali considerati tutti insieme si chiamano i *termini* della proporzione. Il primo ed il quarto termine di una proporzione si chiamano i termini *estremi*, e gli altri due diconsi i termini *medj*.

Le proporzioni si applicano a molte quistioni, o problemi di Aritmetica (a). Per esempio, sapendosi che 6 palmi di panno hanno costato 18 ducati, voglia conoscersi quanto costeranno 2 palmi dello stesso panno. È chiaro che la metà del numero de' palmi di panno, costerà la metà del numero de' ducati, cioè 3 palmi costeranno 9 ducati, e la terza parte del numero de' palmi di panno, costerà la terza parte del numero de' ducati, cioè 2 palmi costeranno 6 ducati. Dunque quante volte il primo numero di palmi contiene il secondo numero di palmi, altrettante volte il primo numero di ducati contiene il secondo numero di ducati; onde i quattro numeri 6, 2, 18, e 6 sono in proporzione, cioè si verifica $6 : 2 :: 18 : 6$.

(a) Si chiama *Problema* una proposizione che esprime una domanda o una quistione da risolversi, e si distingue dal *Teorema* che è una proposizione diretta a dimostrare qualche verità non evidente per se stessa. Per esempio, una proposizione così espressa; *ridurre a minimi termini la frazione $\frac{1}{2}$* , è un problema; e quest'altra, *il prodotto di due frazioni è eguale al prodotto de' numeratori diviso per quello de' denominatori*, è un teorema.

Non è sempre così facile trovare il numero che si cerca, come nel problema attuale, ed allora la dottrina delle proporzioni che si espone qui appresso, serve di guida all'oggetto.

§. 44.

Una ragione geometrica non cambia, se si moltiplichino, o si dividano i suoi termini per un medesimo numero.

Si è già veduto che il rapporto o ragione geometrica di due numeri può sempre scriversi sotto forma di frazione spuria o vera. Ora si sa che una frazione non cambia di valore moltiplicando o dividendo i suoi termini per uno stesso numero. Dunque deve accadere lo stesso di una ragione. Per esempio il rapporto di 3: 12 è eguale a quello di 6: 24 ed a quello di 1: 4, perchè la frazione $\frac{3}{12}$ si cambia in $\frac{6}{24}$ moltiplicando i suoi termini per 2, e si cambia in $\frac{1}{4}$, dividendo per 3 i termini medesimi.

§. 45.

In una proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medj.

Si abbia la proporzione

$$5 : 3 :: 15 : 9,$$

Per ciò che si è detto nel §. 43, dovrà verificarsi l'egualianza seguente,

$$\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$$

Riduciamo queste due frazioni allo stesso denominatore, lasciando indicate le moltiplicazioni col segno X, ed avremo,

$$\frac{5 \times 9}{3 \times 9} = \frac{3 \times 15}{3 \times 9}$$

Queste due frazioni sono eguali ed hanno lo stesso denominatore, e perciò devono essere eguali anche i loro numeratori. Sarà quindi,

$$5 \times 9 = 3 \times 15$$

Ma 5, e 9 sono i termini estremi della proporzione 5 : 3 :: 15: 9, e 3, e 15 sono i termini medj, dunque si verifica la verità fondamentale della teoria delle proporzioni enunciata di sopra, cioè che *in una proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' termini medj.*

§. 46.

Cambiamenti di luogo che possono effettuarsi ne' termini di una proporzione.

La proprietà dimostrata nel §. precedente può servire di criterio per assicurarsi se quattro numeri sono in proporzione. Basterà a quest'oggetto osservare se il prodotto de' termini estremi eguaglia quello de' termini medj. Così i quattro numeri 3, 5, 6, 10 sono in proporzione, perchè il prodotto 3×10 de' termini estremi, eguaglia l'altro 5×6 de' termini medj.

In conseguenza di ciò una proporzione qualunque $3 : 5 :: 6 : 10$ continuerà a sussistere, malgrado che si cambi in molte maniere il luogo de' suoi termini, purchè però que' cambiamenti siano tali che si conservi sempre il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj. I cambiamenti che possono operarsi sono i seguenti,

$$\begin{array}{l} 3 : 6 :: 5 : 10 \\ 5 : 3 :: 10 : 6 \\ 5 : 10 :: 3 : 6 \\ 10 : 5 :: 6 : 3 \\ 10 : 6 :: 5 : 3 \\ 6 : 10 :: 3 : 5 \\ 6 : 3 :: 10 : 5 \end{array}$$

Tutte queste proporzioni sono esatte, perchè in ciascuna di esse si verifica il prodotto degli estremi eguale a quello de' medj. Ma se si facesse,

$$6 : 3 :: 5 : 10;$$

questa non sarebbe una proporzione, perchè 6×10 non è eguale a 3×5 .

Fra i varii cambiamenti che possono effettuarsi, quello che dà origine alla prima delle sette precedenti proporzioni cioè, $3 : 6 :: 5 : 10$, consiste nell'alternare il luogo de' termini medj, nella proporzione originaria $3 : 5 :: 6 : 10$, e si chiama *permutare* la proporzione medesima; e l'altro cambiamento che dà origine alla seconda proporzione, $5 : 3 :: 10 : 6$, consiste nel porre gli antecedenti in luogo de' conseguenti e viceversa, e dicesi *invertire* la proporzione.

Non si altera una proporzione se si moltiplichino o si dividano i suoi antecedenti, o i suoi conseguenti per un medesimo numero.

Sia data la proporzione

$$4 : 6 :: 2 : 3$$

di cui gli antecedenti sono 4, e 2, ed i conseguenti, 6, e 3. Permutiamola ed avremo, (§. 46)

$$4 : 2 :: 6 : 3.$$

In questa proporzione potremo moltiplicare o dividere per un medesimo numero i termini della prima ragione 4 : 2, oppure quelli della seconda ragione 6 : 3, senza che queste ragioni ne rimangono alterate (§. 44); e perciò moltiplichiamo, e dividiamo successivamente i termini della prima ragione per 2, o quelli della seconda ragione per 3, ed avremo le quattro seguenti proporzioni,

$$\begin{array}{l} 4 \times 2 : 2 \times 2 :: 6 : 3, \text{ ovvero } 8 : 4 :: 6 : 3 \\ \frac{4}{2} : \frac{2}{2} :: 6 : 3 \dots\dots 2 : 1 :: 6 : 3 \\ 4 : 2 :: 6 \times 3 : 3 \times 3 \dots\dots 4 : 2 :: 18 : 9 \\ 4 : 2 :: \frac{6}{3} : \frac{3}{3} \dots\dots 4 : 2 :: 2 : 1 \end{array}$$

le quali permutate si cambiano nelle altre,

$$\begin{array}{l} 4 \times 2 : 6 :: 2 \times 2 : 3, \dots \text{ ovvero } 8 : 6 :: 4 : 3 \\ \frac{4}{2} : 6 :: \frac{2}{2} : 3 \dots\dots\dots 2 : 6 :: 1 : 3 \\ 4 : 6 \times 3 :: 2 : 3 \times 3 \dots\dots\dots 4 : 18 :: 2 : 9 \\ 4 : \frac{6}{3} :: 2 : \frac{3}{3} \dots\dots\dots 4 : 2 :: 2 : 1 \end{array}$$

Queste quattro proporzioni di cui l'esattezza è provata dall'esattezza del ragionamento che ad esse ci ha guidato, non sono altro che la proporzione primitiva 4 : 6 :: 2 : 3, nella quale gli antecedenti sono stati moltiplicati o divisi per 2, ed i conseguenti sono stati moltiplicati o divisi per 3. Rimane dunque dimostrata la proposizione enunciata.

Se due proporzioni abbiano una ragione di comune, le due rimanenti ragioni saranno eguali fra di loro.

Siano le due proporzioni,

$$8 : 6 :: 4 : 3$$

$$8 : 6 :: 12 : 9$$

le quali hanno di comune la ragione 8 : 6; deve dimostrarsi che le due ragioni 4 : 3, e 12 : 9 sono eguali fra loro, ossia

che $4 : 3 :: 12 : 9$. Questa verità è evidente per se medesima, poichè dalle due proporzioni date si rileva che ciascuna delle due ragioni $4 : 3$, e $12 : 9$, è la stessa cosa della ragione $8 : 6$. Riaviamone una conseguenza importante.

Consideriamo le due proporzioni

$$3 : 2 :: 6 : 4$$

$$3 : 5 :: 6 : 10$$

le quali hanno gli stessi antecedenti 3, e 6. Permutandole, avremo le altre due proporzioni,

$$3 : 6 :: 2 : 4$$

$$3 : 6 :: 5 : 10$$

che hanno una ragione $3 : 6$ di comune, per cui sarà $2 : 4 :: 5 : 10$. Ma questi quattro numeri sono i conseguenti delle prime due proporzioni, dunque se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti di esse sono in proporzione.

Similmente si dimostrerebbe che, se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti delle medesime sono in proporzione.

§. 49.

Da ogni proporzione geometrica, componendo o dividendo, si ottiene un'altra proporzione.

Sia data la proporzione

$$8 : 6 :: 12 : 9$$

Mettiamo le due ragioni $8 : 6$, e $12 : 9$ sotto forma di frazioni ed avremo,

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$$

Ora è chiaro che l'egualianza di queste due frazioni non si altera, se tanto all'una che all'altra aggiungiamo l'unità. Sarà dunque,

$$1 + \frac{8}{6} = 1 + \frac{12}{9}$$

e riducendo l'intero e frazione ad una sola frazione, si avrà

$$\frac{6+8}{6} = \frac{9+12}{9}$$

Rimettiamo in proporzione queste due ragioni espresse sotto forma di frazione, ed avremo

$$6+8 : 6 :: 9+12 : 9$$

È facile osservare in qual modo questa proporzione è formata per mezzo de' quattro numeri componenti la proporzione primitiva $8 : 6 :: 12 : 9$, per cui si può dire in generale che, in una proporzione qualunque, $8 : 6 :: 12 : 9$, la somma de' due primi termini sta al secondo termine, come la somma de' due ultimi termini sta al quarto termine.

Inoltre le due proporzioni

$$\begin{array}{ccc} 6 + 8 : 6 :: 9 + 12 : 9 \\ 8 : 6 :: 12 : 9 \end{array}$$

hanno gli stessi conseguenti, onde i loro antecedenti sono in proporzione, (§. 48.), cioè

$$6 + 8 : 9 + 12 :: 8 : 12$$

e permutando si avrà,

$$6 + 8 : 8 :: 9 + 12 : 12$$

Quindi in una proporzione qualunque, $8 : 6 :: 12 : 9$, la somma de' due primi termini sta al primo termine, come la somma de' due ultimi termini sta al terzo termine.

Per brevità di linguaggio, si è convenuto di esprimere con la semplice parola componendo l'operazione che si esegue sulla proporzione data $8 : 6 :: 12 : 9$ per derivarne una delle altre due

$$6 + 8 : 6 :: 9 + 12 : 9, \quad 6 + 8 : 8 :: 9 + 12 : 12$$

ora dimostrate; onde le verità che da esse si desumono possono più brevemente enunciarsi, dicendo; da ogni proporzione geometrica, componendo, si ottiene un'altra proporzione.

Riprendiamo la proporzione

$$8 : 6 :: 12 : 9,$$

e l'eguaglianza corrispondente,

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9};$$

ed invece di aggiungere l'unità a ciascuna delle due frazioni eguali $\frac{8}{6}$, e $\frac{12}{9}$, togliamola. Sarà,

$$\frac{8}{6} - 1 = \frac{12}{9} - 1$$

Mettiamo l'unità sotto forma di frazione, ed avremo,

$$\frac{8}{6} - \frac{6}{6} = \frac{12}{9} - \frac{9}{9}$$

Eseguiendo la sottrazione delle frazioni, sarà

$$\frac{8 - 6}{6} = \frac{12 - 9}{9}$$

la quale eguaglianza messa in aspetto di proporzione, darà

$$8 - 6 : 6 :: 12 - 9 : 9.$$

Questa proporzione e l'altra,

$$8 : 6 :: 12 : 9$$

hanno gli stessi conseguenti, per cui i loro antecedenti sono proporzionali, cioè,

$$8 - 6 : 12 - 9 :: 8 : 12$$

e permutando sarà,

$$8 - 6 : 8 :: 12 - 9 : 12$$

Rimangono dunque dimostrate le altre due proporzioni,

$$8 - 6 : 8 :: 12 - 9 : 12$$

$$8 - 6 : 6 :: 12 - 9 : 9$$

le quali si compongono per mezzo de' termini della proporzione primitiva $8 : 6 :: 12 : 9$ in un modo evidente, che viene espresso

dalla parola *dividendo*; onde può conchiudersi che da una *proporzione geometrica qualunque*, dividendo, si ottiene un'altra *proporzione*.

Dalle quattro proporzioni.

$$8 + 6 : 8 :: 12 + 9 : 12$$

$$8 + 6 : 6 :: 12 + 9 : 9$$

$$8 - 6 : 8 :: 12 - 9 : 12$$

$$8 - 6 : 6 :: 12 - 9 : 9,$$

possono desumersi due altre importanti conseguenze. Permutamole, ed avremo le altre quattro,

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 8 : 12$$

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 6 : 9$$

$$8 - 6 : 12 - 9 :: 8 : 12$$

$$8 - 6 : 12 - 9 :: 6 : 9$$

le quali considerate come composte per mezzo de' termini della proporzione primitiva $8 : 6 :: 12 : 9$, dimostrano che, in una *proporzione geometrica qualunque*, la *somma* o la *differenza* de' due primi termini, sta alla *somma* o alla *differenza* degli altri due termini, come il primo al secondo antecedente, o come il primo al secondo conseguente.

Infine fra le ultime quattro proporzioni, la prima e la terza, hanno una ragione di comune, per cui le due rimanenti ragioni sono eguali fra loro, cioè

$$8 + 6 : 12 + 9 :: 8 - 6 : 12 - 9,$$

e permutando si ha,

$$8 + 6 : 8 - 6 :: 12 + 9 : 12 - 9.$$

Dunque in una *proporzione geometrica qualunque*, $8 : 6 :: 12 : 9$, la *somma* de' due primi termini sta alla loro *differenza*, come la *somma* degli altri due termini sta alla *differenza* de' medesimi.

§. 5o.

La somma o la differenza degli antecedenti di una proporzione, sta rispettivamente alla somma o alla differenza de' conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Sia data la proporzione

$$8 : 6 :: 12 : 9;$$

deve dimostrarsi che,

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 8 : 6, \text{ e}$$

$$12 - 8 : 9 - 6 :: 8 : 6.$$

Permutiamo la proporzione data ed avremo,

$$8 : 12 :: 6 : 9.$$

Ma si è dimostrato nel §. precedente che la *somma* o la *differenza* de' termini del primo rapporto sta alla *somma* o alla *differenza*

ferenza de' termini del secondo rapporto; come il primo al secondo antecedente; dunque applicando questa proprietà alla proporzione permutata $8 : 12 :: 6 : 9$, si avrà

$$\begin{aligned} 8 + 12 : 6 + 9 &:: 8 : 6, \text{ e} \\ 12 - 8 : 9 - 6 &:: 8 : 6 \end{aligned}$$

che sono appunto le proporzioni che dovevano dimostrarsi.

Riflettiamo inoltre che, in virtù della proporzione data, la ragione $12 : 9$ essendo la stessa di quella di $8 : 6$, queste due ragioni potranno mettersi indifferentemente una in luogo dell'altra, e perciò si verificheranno ancora le altre due proporzioni,

$$\begin{aligned} 8 + 12 : 6 + 9 &:: 12 : 9, \text{ e} \\ 12 - 8 : 9 - 6 &:: 12 : 9 \end{aligned}$$

Da queste due proporzioni che hanno una ragione di comune si rileva pure (§. 48) che

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 12 - 8 : 9 - 6$$

e permutando,

$$8 + 12 : 12 - 8 :: 6 + 9 : 9 - 6,$$

cioè, in una proporzione qualunque $8 : 6 :: 12 : 9$, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti sta alla differenza de' medesimi.

§. 51.

Se si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

Siano i rapporti eguali

$$8 : 6, 12 : 9, 20 : 15,$$

deve dimostrarsi che

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6$$

Consideriamo prima i due rapporti eguali, $8 : 6$, e $12 : 9$, ed avremo la proporzione, $8 : 6 :: 12 : 9$, nella quale per ciò che si è detto di sopra, sarà

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 8 : 6$$

Ma essendo i rapporti $8 : 6$, e $20 : 15$ eguali fra loro, può scriversi uno in luogo dell'altro, dunque sarà,

$$8 + 12 : 6 + 9 :: 20 : 15$$

Applicando a quest'ultima proporzione la stessa proprietà che la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente si avrà,

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 20 : 15,$$

ovvero sostituendo al rapporto $20 : 15$ uno degli altri due rapporti eguali, $8 : 6$, e $12 : 9$, sarà pure

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6, \text{ ed}$$

$$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 12 : 9;$$

e rimane così dimostrata la proposizione enunciata.

Le tre ultime proporzioni possono anche scriversi più brevemente così,

$8 + 12 + 20 : 6 + 9 + 15 :: 8 : 6 :: 12 : 9 :: 20 : 15$,
ed allo stesso modo si scrive una qualunque serie di rapporti eguali.

§. 52.

Se si hanno due proporzioni, il prodotto degli antecedenti delle prime ragioni sta al prodotto de' conseguenti, come il prodotto degli antecedenti delle seconde ragioni sta al prodotto de' conseguenti.

Siano le due proporzioni

$$4 : 3 :: 6 : 8$$

$$2 : 5 :: 4 : 10,$$

deve dimostrarsi che

$$4 \times 2 : 3 \times 5 :: 6 \times 4 : 8 \times 10.$$

Si moltiplichino i termini delle due ragioni componenti la prima proporzione rispettivamente per gli antecedenti della seconda proporzione, ed i termini delle due ragioni componenti la seconda proporzione rispettivamente pe' conseguenti della prima, e si avranno le altre due proporzioni,

$$4 \times 2 : 3 \times 2 :: 6 \times 4 : 8 \times 4$$

$$2 \times 3 : 5 \times 3 :: 4 \times 8 : 10 \times 8$$

Riflettendo che i quattro termini componenti quest'ultima proporzione sono altrettanti prodotti ne' quali può cambiarsi l'ordine de' fattori senza che rimangano alterati, ed invertendo la proporzione medesima, si avranno ancora le proporzioni,

$$4 \times 2 : 3 \times 2 :: 6 \times 4 : 8 \times 4$$

$$3 \times 5 : 3 \times 2 :: 8 \times 10 : 8 \times 4$$

le quali hanno i medesimi conseguenti, e perciò gli antecedenti sono proporzionali cioè,

$$4 \times 2 : 6 \times 4 :: 3 \times 5 : 8 \times 10$$

e permutando si ha infine,

$$4 \times 2 : 3 \times 5 :: 6 \times 4 : 8 \times 10$$

che è la proporzione la quale doveva dimostrarsi.

§. 53.

Della regola del tre.

L'operazione mediante la quale dati tre termini di una proporzione si trova il quarto; dicesi REGOLA DEL TRE.

Sia data la proporzione $5 : 3 :: 10 : x$, in cui la lettera x posta in luogo del quarto termine dinota che quel termine non

si conosce ancora. Poichè in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medj, (§. 45) dovrà essere, 5 moltiplicato per x eguale a 3×10 , ovvero

$$5 \times x = 30.$$

Dunque 30 è eguale al prodotto di 5 per x , ossia 30 è un prodotto di cui si conosce un fattore 5, e si cerca l'altro fattore x . Questo fattore sarà perciò il quoziente della divisione di 30 per 5, e si avrà

$$x = \frac{30}{5} = 6.$$

E riflettendo che il numero 30 è nato dal prodotto de' numeri 3 e 10, che sono i termini medj della proporzione data, si conchiuderà che *quando in una proporzione si cerca uno de' termini estremi, questo termine si ottiene moltiplicando fra loro i due termini medj, e dividendo il prodotto pel termine estremo conosciuto.*

Se fosse incognito un termine medio, come nella proporzione $5 : x :: 10 : 6$, con un ragionamento simile al precedente si troverebbe,

$$x = \frac{5 \times 6}{10} = 3$$

ossia, *quando si cerca uno de' termini medj, si moltiplicano gli estremi, ed il prodotto si divide pel termine medio conosciuto.*

§. 54.

La regola del tre si distingue in diretta ed inversa, quando si applica ai problemi di Aritmetica.

Applichiamo la regola del tre a qualche problema.

Un tessitore ha fatto 41 canne di tela in 5 giorni; si domanda per farne 68, quanto tempo impiegherà.

Le quantità indicate nel problema si situeranno come segue,

$$\begin{array}{ll} 41 & \text{canne } 5 \text{ giorni} \\ 68 & \text{canne } x \text{ giorni} \end{array}$$

ed è chiaro che se il numero delle canne fosse doppio, il numero de' giorni per tesserle sarebbe pure doppio, se fosse triplo, il numero de' giorni sarebbe triplo etc., e perciò quante volte 68 canne contiene 41 canne, altrettante volte x giorni dovrà contenere 5 giorni. Dunque dovrà esservi proporzione fra i quattro numeri 68, 41, x , e 5 e si avrà

$$68 : 41 :: x : 5, \text{ onde}$$

$$x = \frac{68 \times 5}{41}$$

Ora si vede che tutta la difficoltà consiste nello stabilire o come siot dirsi *intavolare* la proporzione. Per dare una regola sicura a quest' oggetto, si osserverà che in ogni proporzione vi sono sempre due termini di una stessa specie, e gli altri due sono pure della medesima specie, ma diversa dalla prima. Così nella precedente proporzione, i due termini 68 e 41 sono canne, e gli altri due x e 5 sono giorni.

Dopo di questa distinzione si potrà sempre intavolare la proporzione come segue.

Il maggior termine della prima specie sta al minor termine della stessa specie, come il maggior termine della seconda specie sta al minor termine della medesima specie; oppure inversamente, il minor termine della prima specie, al maggior termine della stessa specie, come il minor termine della seconda specie, al maggior termine della specie medesima, giacchè si è veduto (§. 46) che una proporzione non si altera *invertendo*. Sapendosi per esempio, che 27 canne di stoffa hanno costato 15 ducati, si domanda quanto costeranno 10 canne della stoffa medesima. Rappresentando con x il costo delle 10 canne non ancora conosciuto, si distingueranno quì i due numeri 27 e 10 che sono della stessa specie, cioè sono canne, ed i numeri 15 ed x , che sono pure della stessa specie ma diversa dalla prima, cioè sono ducati. E poichè un minor numero di canne di stoffa deve costare di meno, il numero x dovrà esser minore di 15, onde la proporzione sarà intavolata così, $27 : 10 :: 15 : x$; cioè il maggior numero di canne al minor numero di canne, come il maggior numero di ducati al minor numero di ducati.

La regola del tre si chiama diretta quando crescendo un termine della prima specie, cresce ancora il termine corrispondente della seconda specie, o diminuendo il primo, diminuisce pure il secondo. Le due quistioni precedenti appartengono alla regola del tre diretta, perchè crescendo il lavoro da farsi, cresce il tempo che deve impiegarsi, e diminuendo il numero delle canne di stoffa, diminuisce il prezzo corrispondente.

Si chiama regola del tre inversa quella nella quale crescendo un termine della prima specie, diminuisce nella proporzione il termine corrispondente della seconda specie, o diminuendo il primo cresce il secondo. Per esempio 15 operai avendo scavato un fosso in 8 giorni, si domanda 27 operai in quanto tempo scaveranno un fosso eguale. Si situeranno i numeri come segue.

15 operai 8 giorni

27 operai x giorni

e si rifletterà che crescendo il numero degli operai, deve diminuire il numero de' giorni necessari per scavar il fosso. Così

un numero doppio di lavoratori impiegherà a scavar il fosso la metà del tempo, ossia la metà del numero de' giorni, ed un numero triplo di lavoratori impiegherà la terza parte del numero de' giorni etc., onde quante volte il numero 27 degli operai contiene il numero 15 degli operai, altrettante volte il numero x de' giorni corrispondente al 27, dovrà esser contenuto nel numero 8 de' giorni corrispondente al 15; ed x sarà minore di 8 mentre 27 è maggiore di 15. La regola del tre è dunque inversa, e si chiama così perchè la prima ragione di 27 : 15 è *inversa* della seconda ragione di x : 8, ossia non sta 27 : 15 :: x : 8, ma per intavolare la proporzione deve rovesciarsi, o invertirsi la ragione di x : 8, e scriversi,

$$27 : 15 :: 8 : x.$$

§. 55.

Cosa s' intende per ragion composta.

Ragion composta di due o più ragioni si dice quella di cui l' antecedente è il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni, ed il conseguente è il prodotto de' conseguenti. Per esempio avendosi le due ragioni

$$\begin{array}{l} 3 : 7 \\ 4 : 5 \end{array}$$

la ragion composta di queste due ragioni è la ragione di 12 : 35. Così pure la ragione composta delle ragioni

$$\begin{array}{l} 1 : 2 \\ 3 : 4 \\ 6 : 5 \end{array}$$

sarà quella di 18 : 40. Mettendo le ragioni sotto forma di frazioni, si vede subito che la ragion composta di due o più ragioni, non è che il prodotto di due o più frazioni. Nell' esempio precedente le tre ragioni sono $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{5}$, e la ragion composta è il prodotto di queste tre frazioni, cioè

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{1 \times 3 \times 6}{2 \times 4 \times 5} = \frac{18}{40}.$$

§. 56.

Della regola del tre composta.

Si chiama regola del tre composta quella nella quale il valore della quantità che si cerca, non dipende dai soli tre termini di una proporzione come nella regola del tre semplice, ma di-

pende da cinque , o sette , o nove , etc. quantità , secondo le circostanze. Osserviamolo ne seguenti problemi.

Problema 1. Quattro operai lavorando per 3 giorni , hanno fatto 8 canne di lavoro ; si domanda 13 operai in 7 giorni quanto lavoro faranno. Dispongansi i numeri come qui appresso ,

$$\begin{array}{ccc} 4 & \text{operai} & 3 & \text{giorni} & 8 & \text{canne} \\ 13 & & 7 & & x & \end{array}$$

e si vedrà subito che in questo problema debbono distinguersi tre ragioni o rapporti , mentre nella regola del tre semplice se ne considerano due soltanto. I tre rapporti sono ,

$x : 8$, che è il rapporto della cosa cercata alla cosa data dello stesso genere ,

$13 : 4$ rapporto degli operai ,

$7 : 3$ rapporto de' giorni.

Riflettasi ora che il lavoro x che si cerca non dipende soltanto dal numero degli operai , ma dipende anche dal numero de' giorni. Poichè il lavoro cresce evidentemente per due motivi , cioè cresce crescendo il numero degli uomini , e cresce crescendo il tempo che impiegano a travagliare. Per risolvere il problema consideriamo queste due circostanze separatamente , decomponendo la regola del tre composta in due regole del tre semplici.

In primo luogo rimanga lo stesso il numero de' giorni di lavoro , ed allora la quantità del lavoro medesimo dipenderà dal numero degli uomini soltanto , e crescerà crescendo questo numero. In fatti , ritenendo che 4 uomini in tre giorni abbiano fatto 8 canne di lavoro , si cerchi il lavoro di 13 uomini negli stessi tre giorni. Si dispongano i numeri al solito , come qui sotto ,

$$\begin{array}{ccc} 4 & \text{uomini} & 3 & \text{giorni} & 8 & \text{canne} \\ 13 & & 3 & & y & \end{array}$$

e si dirà ; se 4 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro , 8 uomini *nello stesso tempo* faranno un lavoro doppio , 12 uomini faranno un lavoro triplo , ec. ; onde il lavoro è in proporzione del numero degli uomini soltanto. Dunque per trovare il lavoro di 13 uomini ne' tre giorni indicati , si farà la proporzione ,

$$4 \text{ uomini} : 13 \text{ uomini} :: 8 \text{ canne} : y = \frac{8 \times 13}{4} \text{ canne} :$$

e quindi con supporre lo stesso il numero de' giorni di lavoro , la regola del tre da composta è divenuta semplice , e delle tre ragioni distinte di sopra , è restata soppressa appunto la ragione de' giorni che ha i termini eguali.

In secondo luogo rimanga lo stesso il numero degli operai , e si faccia variare il numero de' giorni ; la quantità del lavoro

dipenderà da questo numero soltanto, e crescerà o diminuirà con esso. Dalla precedente proporzione sapendosi che 13 uomini in 3 giorni hanno fatto $\frac{8 \times 13}{4}$ canne di lavoro, si cerchi il lavoro che gli stessi 13 uomini faranno in 7 giorni. Le quantità saranno disposte come segue,

$$13 \text{ uomini } 3 \text{ giorni } \frac{8 \times 13 \text{ canne}}{4}$$

$$13 \quad 7 \quad x$$

e si dirà; se 13 uomini in 3 giorni hanno fatto un certo lavoro, lo stesso numero di uomini in 6 giorni farà un lavoro doppio, in 9 giorni farà un lavoro triplo etc., onde il lavoro è in proporzione de' giorni, e per trovare il lavoro fatto dall' indicata compagnia di operai in 7 giorni, si farà la proporzione,

$$3 \text{ giorni} : 7 \text{ giorni} :: \frac{8 \times 13 \text{ canne}}{4} : x \text{ canne}$$

E qui ancora, con supporre lo stesso il numero degli operai, si ha una regola del tre semplice, poichè rimane soppressa appunto la ragione degli operai che ha i termini eguali.

Il quarto termine dell' ultima proporzione rappresenta il lavoro di 13 operai in 7 giorni, che è ciò che si ricercava nel problema proposto. Riprendiamo la proporzione medesima,

$$3 : 7 :: \frac{8 \times 13}{4} : x$$

e dividiamo i termini della seconda ragione per 8; avremo,

$$3 : 7 :: \frac{13}{4} : \frac{x}{8}$$

E poichè uno degli estremi di una proporzione è eguale al prodotto de' due medii diviso per l' altro estremo, sarà,

$$\frac{x}{8} = \frac{13 \times 7}{4 \times 3}$$

Mettiamo quest' eguaglianza sotto forma di proporzione ed avremo, $x : 8 :: 13 \times 7 : 4 \times 3$.

Ora essendo i numeri 13, e 7 gli antecedenti delle due ragioni $13 : 4$, e $7 : 3$, ed i numeri 4 e 3 i conseguenti delle ragioni medesime, ne segue che la ragione di $x : 8$ è eguale alla ragione $13 \times 7 : 4 \times 3$ composta delle ragioni $13 : 4$ e $7 : 3$, che sono quella degli uomini e quella de' giorni. Dunque *nella regola del tre composta la ragione della cosa cercata alla cosa data, è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema.*

Deve osservarsi che nel problema precedente la ragione de-

gli uomini non meno che la ragione de' giorni sono *dirette* alla ragione della cosa cercata alla cosa data (§. 54). In fatti crescendo il numero degli operai, cresce evidentemente il lavoro che essi fanno, e crescendo il numero de' giorni che impiegano a travagliare, deve anche risultar maggiore il lavoro eseguito. Accade però spesso che qualcheduna delle ragioni che entrano nel problema, sia inversa alla ragione della cosa cercata alla cosa data. Per esempio;

Problema II. Quattro operai hanno fatto 8 canne di lavoro in 3 giorni; si domanda 9 operai per fare 42 canne di lavoro quanto tempo impiegheranno. Si dispongano i numeri come segue,

4 operai 8 canne 3 giorni

9 42 x

e si osservi che le ragioni che entrano nel problema sono,

x : 3 ragione della cosa cercata alla cosa data, ossia ragione de' giorni,

9 : 4 ragione degli uomini,

42 : 8 ragione del lavoro.

Riflettasi inoltre che la ragione degli uomini è inversa alla ragione de' giorni, poichè crescendo il numero degli uomini che travagliano, diminuisce il tempo necessario per fare un certo lavoro; e la ragione del lavoro è diretta a quella de' giorni, poichè crescendo il lavoro, ci vuole maggior tempo per eseguirlo.

Ciò premesso il numero x de' giorni dipende come nel problema precedente tanto dal lavoro da farsi che dal numero degli uomini che devono eseguirlo; ma possono queste due circostanze considerarsi separatamente, supponendo prima che il lavoro rimanga lo stesso, ed indi che rimanga lo stesso il numero degli uomini.

1.º Si proporrà la quistione,

4 uomini hanno fatto 8 canne in 3 giorni

9 uomini per fare 8 canne quanti giorni impiegheranno?

E per trovare il numero de' giorni che si cerca, si rifletterà che se 4 uomini hanno fatto un certo lavoro in 3 giorni, 8 uomini faranno lo stesso lavoro nella metà del tempo, 12 uomini lo faranno nel terzo del tempo ec., onde il numero de' giorni è inversamente proporzionale a quello degli uomini, e si avrà;

$$9 : 4 :: 3 : y = \frac{3 \times 4}{9}$$

2.º Si proporrà l'altra quistione,

9 uomini hanno fatto 8 canne in $\frac{3 \times 4}{9}$ giorni

9 uomini per fare 42 canne quanti giorni impiegheranno?

Per trovare il numero de' giorni che si cerca, si osserverà che lo stesso numero di uomini deve impiegare maggior tempo a fare un maggior lavoro, onde il numero de' giorni sarà proporzionale direttamente al numero delle canne, e si avrà,

$$8 : 42 :: \frac{3 \times 4}{9} : x = \frac{3 \times 4 \times 42}{9 \times 8} = 7$$

Questo valore di x esprime il numero de' giorni che impiegheranno 9 uomini a fare 42 canne di lavoro, che è ciò che si domandava; e quindi il problema proposto rimane risoluto con due regole del tre semplici una inversa e l'altra diretta.

Nell'ultima proporzione dividendo i termini della seconda ragione per 3, si ottiene

$$8 : 42 :: \frac{4}{9} : \frac{x}{3}$$

E poichè uno degli estremi eguaglia il prodotto de' due medii diviso per l'altro estremo, si avrà,

$$\frac{x}{3} = \frac{42 \times 4}{8 \times 9}$$

Mettendo questa eguaglianza sotto aspetto di proporzione, risulterà,

$$x : 3 :: 42 \times 4 : 8 \times 9.$$

Da cui si vede che la ragione di $x : 3$ è eguale alla ragione di $42 \times 4 : 8 \times 9$ composta delle ragioni $42 : 8$, e $4 : 9$. Dunque anche in questo problema la ragione della cosa cercata alla cosa data, è composta delle ragioni di tutte le altre quantità che entrano nel problema; ma la ragione degli uomini essendo inversa a quella de' giorni, invece di adoperarsi la ragione $9 : 4$, si è adoperata la ragione inversa $4 : 9$.

Dopo di ciò si può dare una regola generale per risolvere qualunque problema dello stesso genere de' due precedenti. Questa regola sarà la seguente.

1.^o *Situate le quantità che entrano nel problema in due linee orizzontali, scrivendo quelle della stessa specie le une sotto le altre.*

2.^o *Esaminate le ragioni delle diverse quantità che entrano nel problema, osservando quali sono dirette, e quali inverse alla ragione della cosa cercata alla cosa data.*

3.^o *Scrivete le ragioni dirette nell'ordine in cui sono, e le ragioni inverse scrivetele, invertendone i termini.*

4.^o *La ragione della cosa cercata alla cosa data sarà composta di tutte le altre ragioni, e perciò stabilite la seguente proporzione la quale risolverà il problema.*

La cosa cercata sta alla cosa data, come il prodotto di tutti gli antecedenti delle altre ragioni, sta al prodotto di tutti i conseguenti.

Applichiamo questa regola ad un problema.

Problema III. Quattro mortai sparando per 3 ore al giorno hanno gettato 1000 bombe in una fortezza, nello spazio di 7 giorni; si domanda, 6 mortai sparando per 2 ore al giorno, per gettare 1500 bombe quanti giorni dovranno impiegare?

1.^o Scriviamo le quantità secondo la regola

4	mortai	3	ore	1000	bombe	7	giorni
6		2		1500		x	

2.^o Esaminiamo le ragioni delle quantità che entrano nel problema.

Questo esame sarà facilissimo quando nel quadro precedente che contiene tutte le quantità che entrano nel problema, si abbia l'avvertenza di supporre eguali tutti i numeri della stessa specie, all'infuori de' termini della ragione che si esamina, e della ragione della cosa cercata alla cosa data. Così per esaminare la ragione de' mortai la supposizione sarà,

4	mortai	3	ore	1000	bombe	7	giorni
6		3		1000		x	

e si dirà; più mortai si adoperano, e minor numero di giorni vi bisogna per gettare una stessa quantità di bombe, sparando un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione de' mortai è inversa a quella de' giorni, ossia alla ragione della cosa cercata alla cosa data.

Per la ragione delle ore la supposizione sarà,

4	mortai	3	ore	1000	bombe	7	giorni
4		2		1000		x	

e si dirà; meno ore al giorno sparano i mortai, ed impiegheranno maggior numero di giorni a gettare la stessa quantità di bombe. Dunque la ragione delle ore è inversa.

Per la ragione delle bombe la supposizione sarà,

4	mortai	3	ore	1000	bombe	7	giorni
4		3		1500		x	

e si dirà; più bombe devono gettarsi, e maggior numero di giorni ci vuole, per uno stesso numero di mortai, che sparino un egual numero di ore al giorno. Dunque la ragione delle bombe è diretta.

3.^o Scriviamo le ragioni

Ragione della cosa cercata alla cosa data . . . x : 7

Ragione inversa de' mortai 4 : 6

Ragione inversa delle ore 3 : 2

Ragione diretta delle bombe 1500 : 1000

4.^o Stabiliamo la proporzione secondo la regola, ed avremo

x : 7 :: 4 × 3 × 1500 : 6 × 2 × 1000

da cui si ricava,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{7^2 \times 4 \times 3 \times 1500}{6 \times 2 \times 1000}, \text{ ovvero} \\
 x &= 7 \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{2} \times \frac{1500}{1000}, \text{ ossia} \\
 x &= 7 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}, \text{ e quindi} \\
 x &= 7 \times \frac{3}{2}, \text{ ed in fine} \\
 x &= 10 \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

§. 57.

Regola d'interesse.

Il denaro messo in commercio dà un guadagno o un frutto che si chiama *interesse*. Per esempio 100 ducati danno un guadagno o un interesse di 5 ducati in un anno, e possono dare di meno o di più secondo le circostanze. Ora se un capitale di 100 ducati dà un frutto di 5 ducati alla fine dell'anno, è chiaro che un capitale di 200 ducati darà un frutto o interesse di 10 ducati, un capitale di 300 ducati darà un interesse di 15 ducati, ed in generale conoscendo l'interesse sopra un capitale di 100 ducati, potrà con una regola del tre diretta conoscersi l'interesse corrispondente a qualunque altro capitale. Si vuol calcolare per esempio l'interesse di un capitale di 2500 ducati, sapendosi che un capitale di 100 ducati dà per interesse annuale 6 ducati. Si farà la proporzione.

$$100 : 2500 :: 6 : x = \frac{6 \times 2500}{100} = 150$$

L'enunciazione di questo problema si abbrevia comunemente dicendo; *si vuol sapere l'interesse di un capitale di 2500 ducati alla ragione del 6 per 100 l'anno, o semplicemente al 6 per 100.*

L'interesse si conviene ordinariamente per un anno, e perciò se si domandasse quale è l'interesse di 8 mesi al 6 per 100 sopra un capitale di 2500 ducati, si dovrebbe prima trovare l'interesse per un anno colla proporzione precedente, e poi considerando che l'anno è composto di 12 mesi, e quindi 8 mesi sono $\frac{8}{12}$, ovvero $\frac{2}{3}$ di un anno, si dovrebbero prendere i $\frac{2}{3}$ di 150 ducati, e si conchiuderebbe che l'interesse per 8 mesi è $150 \times \frac{2}{3}$ (§. 25), ossia 100 ducati.

Gl'interessi di un anno ed 8 mesi al 6 per 100 sopra lo stesso capitale sarebbero $150 \times 1 \frac{2}{3}$, ovvero 250 ducati; dimo-

73
 dochè il capitale aumentato degl'interessi, in un anno ed 8 mesi
 diverrebbe 2750 ducati.

§. 58.

Dello sconto degli effetti di commercio.

Le cambiali, i boni e tutti gli altri effetti di commercio, in generale sono carte nelle quali un pubblico negoziante promette il pagamento di una somma di denaro alla fine di un tempo determinato. Colui che possiede una di queste carte quando è trascorso il tempo stabilito, o come suol dirsi, alla scadenza della cambiale, bono etc., si presenta al negoziante e riceve immediatamente la somma promessa; ma se gli bisognasse il denaro prima della scadenza, potrà quando gli piace ritirarlo dallo stesso negoziante, o anche da un altro, rilasciandogli un interesse o guadagno che dicesi *sconto*, il quale si regola nel modo seguente.

Per esempio il possessore di una cambiale di 350 ducati che scade dopo 9 mesi, vuol esigere subito il suo denaro, senza aspettare il termine stabilito; si domanda quale somma dovrà ricevere dal negoziante. Riflettasi che costui avendo i suoi capitali in commercio ne ritrae un interesse che supponiamo del 6 per 100 l'anno; per conseguenza, se egli ritenesse per altri 9 mesi presso di se la somma di cui si tratta, ne ritrarrebbe un lucro che egli perde anticipando la somma stessa, e del quale deve essere rimborsato. Questo è lo sconto che dobbiamo calcolare.

Chiamiamo x la somma che il padrone della cambiale deve ricevere dal negoziante, quando vuole subito il suo denaro. Affinchè il negoziante non perda nell'eseguire prontamente un pagamento che sarebbe in obbligo di fare soltanto dopo 9 mesi, è chiaro che la somma x deve esser tale che, accresciuta dell'interesse corrispondente al 6 per 100 calcolato per 9 mesi, divenga eguale a 350 ducati. Così sarà lo stesso pel commerciante pagare la somma x prontamente, o la somma di 350 ducati dopo 9 mesi. Ora un capitale di 100 ducati dà 6 ducati d'interesse in un anno, e quindi in 9 mesi che sono $\frac{3}{4}$ di un anno darà $\frac{3}{4}$ di 6 ducati, ossia $4\frac{3}{4}$ ducati. Vale a dire che 100 ducati accresciuti dell'interesse corrispondente in 9 mesi divengono $104\frac{3}{4}$ ducati; e nello stesso modo x ducati accresciuti dell'interesse corrispondente in 9 mesi devono divenire 350 ducati. Potrà dunque stabilirsi la proporzione

$100 : 104,5 :: x : 350$, da cui si rileva

$$x = \frac{35000}{104,5} = \frac{350000}{1045} = 334,93$$

Quindi il negoziante pagherà prontamente ducati 334,93, ritenendosi lo sconto di ducati 15,07, che corrisponde all'interesse di 9 mesi al 6 per 100 sopra la somma pagata di 334,93, come può verificarsi.

§. 59.

Della regola di compagnia.

L'oggetto della regola di *compagnia* o di *società* si comprende dall'esempio seguente.

Problema. Tre negozianti hanno riuniti i loro capitali affine di porli in commercio. Il primo ha posto ducati 2500, il secondo 1800, ed il terzo 4200. Dopo qualche tempo vogliono dividersi il guadagno fatto sull'intero capitale ch'è stato di 5720 ducati: si domanda quanto spetta a ciascuno.

Il capitale totale è

$$2500 + 1800 + 4200 = 8500 \text{ ducati}$$

ed è chiaro che se uno de' negozianti avesse posta la metà del capitale totale, gli spetterebbe la metà del guadagno totale, se avesse posta la terza parte del capitale totale, gli spetterebbe la terza parte del guadagno etc. Dunque il guadagno particolare di ciascun negoziante deve essere contenuto nel guadagno totale tante volte, quante volte il capitale particolare è contenuto nel capitale totale. Perciò il guadagno particolare di ciascuno si troverà per mezzo della proporzione seguente;

Capitale totale : capitale particolare :: guadagno totale : guadagno particolare.

Si avrà quindi,

$$8500 : 2500 :: 5720 : x = 1682 \frac{6}{17}$$

$$8500 : 1800 :: 5720 : y = 1211 \frac{1}{17}$$

$$8500 : 4200 :: 5720 : z = 2826 \frac{6}{17}$$

Somma de' guadagni particolari. . 5720

È evidente che la somma de' guadagni particolari così calcolati deve eguagliare il guadagno totale, e sarà questa la riprova dell'operazione.

Le tre precedenti proporzioni hanno gli stessi antecedenti, e perciò i conseguenti saranno proporzionali (§. 48), cioè sarà,

$$2500 : x :: 1800 : y :: 4200 : z, \text{ ovvero permutando,}$$

$$2500 : 1800 : 4200 :: x : y : z$$

Da ciò si rileva che la *regola di società* consiste nel dividere un numero dato, per esempio 5720, in più parti, x, y, z , le quali serbino fra loro lo stesso rapporto che hanno uno rispetto all'altro alcuni numeri dati, come 2500, 1800, e 4200.

Quando i negozianti che formano società di commercio non impiegano i loro capitali per lo stesso tempo, la distribuzione del guadagno deve farsi avendo riguardo a questa circostanza; ed allora la regola di società dicesi composta. Nel problema precedente supponiamo che il primo negoziante abbia tenuto il suo capitale in società per 4 anni, il secondo abbia tenuto il suo per 6 anni, ed il terzo l'abbia tenuto per 3 anni. Dovranno considerarsi nel problema le seguenti quantità,

Capitali	Tempi	Guadagni
2500	4	x
1800	6	y
4200	3	z
		Somma o guadagno totale. . 5720

È chiaro che il guadagno particolare di ciascuno dipenderà in questo caso tanto dal valore del capitale impiegato, quanto dal tempo che si è tenuto in commercio; onde supponendo per un momento conosciuto il guadagno x, gli altri guadagni y e z potranno ottenersi per mezzo delle due seguenti regole del tre composte, cioè la prima,

2500 capitale 4 anni x guadagno

1800 6 y

e l'altra,

2500 capitale 4 anni x guadagno

4200 3 z

Quindi, per ciò che si è detto nel §. 56, la ragione di x : y sarà composta delle ragioni, 2500 : 1800, e 4 : 6; e la ragione di x : z sarà composta delle due 2500 : 4200, e 4 : 3; cioè sarà,

$$x : y :: 2500 \times 4 : 1800 \times 6$$

$$x : z :: 2500 \times 4 : 4200 \times 3,$$

le quali permutate divengono

$$x : 2500 \times 4 :: y : 1800 \times 6$$

$$x : 2500 \times 4 :: z : 4200 \times 3$$

Da queste due proporzioni si scorge (§. 48) che le tre ragioni

$$x : 2500 \times 4, y : 1800 \times 6, z : 4200 \times 3$$

sono eguali fra loro, onde pel §. 51 si avrà che, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente, cioè

$$x + y + z : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: x : 2500 \times 4$$

$$x + y + z : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: y : 1800 \times 6$$

$$x + y + z : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: z : 4200 \times 3$$

E riflettendo che la somma x + y + z de' guadagni partico-

lari non è altro che il guadagno totale 5720, si avranno finalmente le tre seguenti proporzioni che risolvono il problema,

$$5720 : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: x : 2500 \times 4$$

$$5720 : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: y : 1800 \times 6$$

$$5720 : 2500 \times 4 + 1800 \times 6 + 4200 \times 3 :: z : 4200 \times 3$$

Da queste proporzioni si desume la regola generale per tutti i problemi analoghi;

Il guadagno totale sta alla somma de' prodotti di ciascun capitale pel tempo corrispondente, come un guadagno particolare sta ad uno di quei prodotti.

§. 60.

Della ragione e della proporzione aritmetica.

Nel §. 43 abbiamo distinte due maniere di paragonare i numeri, la prima osservando di quanto uno supera l'altro, e la seconda osservando quante volte uno è contenuto nell'altro. Quest'ultima ci ha dato idea della ragione geometrica; ci rimane ora a parlare brevemente della ragione aritmetica che dipende dalla prima.

Si chiama rapporto, o ragione aritmetica, di due numeri, la differenza che vi è fra i medesimi. Così il rapporto aritmetico de' due numeri 5 e 3, è 5 — 3, ossia 2.

Analogamente a ciò che si è detto delle proporzioni geometriche, *dicesi proporzione aritmetica l'eguaglianza di due ragioni aritmetiche.* Per esempio i quattro numeri, 5, 3, 6, e 4 sono in proporzione aritmetica, perchè la differenza de' due primi è eguale alla differenza degli altri due. La proporzione aritmetica si scrive così,

$$5 : 3 : 6 : 4$$

e si pronunzia come la proporzione geometrica cioè, 5 sta a 3 come 6 sta a 4.

In ogni proporzione aritmetica la somma de' termini estremi è eguale a quella de' termini medii.

In fatti poichè in una sottrazione il resto, o differenza aggiunta al numero minore dà il numero maggiore, (§. 7) il primo termine 5 della proporzione sarà eguale al secondo termine 3 più la differenza 2. Similmente il terzo termine 6 sarà eguale al quarto termine 4 più la differenza 2. Dunque la somma del primo e del quarto termine sarà eguale al secondo termine più la differenza più il quarto termine; e la somma del secondo e del terzo termine sarà eguale al secondo termine più il quarto più la differenza. Queste due somme essendo composte delle medesime parti saranno per conseguenza eguali, ossia la somma degli estremi sarà eguale a quella de' medii.

Una proporzione aritmetica continua a sussistere, malgrado che si cambii in molte maniere il luogo de' suoi termini, purchè però que' cambiamenti sieno tali che si conservi sempre la somma degli estremi eguale a quella de' medii (a).

§. 61.

Regola di alligazione.

La regola di alligazione serve per trovare il valore medio di più cose dello stesso genere, ma di valori diversi. Per esempio;

Un mercante ha comprato più qualità di vini cioè,

130 bottiglie a 10 grana l'una

75 a 15

231 a 12

27 a 20

esso le mescola, e vuol sapere quanto gli costa una bottiglia del vino mescolato.

È chiaro che le

130 bottiglie a 10 grana l'una costano 1300 grana

75 a 15 1125

231 a 12 2772

27 a 20 540

463 bottiglie di vino costano. 5737 grana

E perciò dividendo il prezzo totale del vino comprato cioè 5737 pel numero totale delle bottiglie 463, si avrà il prezzo di una sola bottiglia della mescolanza, che sarà 12 grana e $\frac{387}{463}$.

Nello stesso modo si risolverebbe qualunque altro problema simile; e questa regola si applica specialmente alle *leghe* o miscugli di varii metalli che si usano nelle arti.

(a) Le denominazioni di proporzione *geometrica*, e proporzione *aritmetica*, sono credute improprie da alcuni matematici, poichè delle proporzioni dette *geometriche*, si occupa pure, ed in principal modo, l'*Aritmetica*. Essi rettificano il linguaggio conservando il nome di proporzione alla sola *geometrica*, e chiamando *numeri equidifferenti* i quattro termini componenti una proporzione *aritmetica*. Ma questa maniera di esprimersi non sembra adottata generalmente, forse perchè meno comoda e concisa dell'*antica*, ed altronde per l'analogia che vi è fra le proprietà della proporzione *geometrica* e quelle dell'*aritmetica*, non pare che possa negarsi a quest'ultima il nome di proporzione.

§. 62.

Delle principali misure napoletane.

Tutte le contrattazioni nella società sono regolate per mezzo di *moduli* o *campioni* che servono a valutare la quantità del genere che si vuol vendere o comprare, e diconsi *misure*. Per esempio volendo comprare una certa quantità di panno, dovrà essa valutarsi per mezzo di una lunghezza presa per unità, che si chiama *palm*; affinchè stabilito il prezzo di un *palm* di panno, possa subito conoscersi il costo della quantità di panno che si desidera, come di *palmi* $3 \frac{2}{4}$. Le misure sono di varie specie secondo l'uso al quale vengono destinate, e si distinguono principalmente in

Misure di lunghezza

Misure itinerarie

Misure superficiali o agrarie

Misure di capacità per i liquidi

Misure di capacità per gli aridi

Pesi.

Le misure usate nella Città di Napoli sono le seguenti.

L'unità di lunghezza, ossia l'unità lineare si chiama *palm*. Il *palm* si divide in 12 *once*, e l'*oncia* in 5 minuti. Si chiama poi *canna* una lunghezza di 8 *palmi*.

L'unità itineraria, ossia quella che serve a valutare le distanze fra i varii luoghi e città, si chiama *miglio* e contiene 1000 passi, ognuno de' quali vale 7 *palmi*.

L'unità di superficie, ossia quella che serve a valutare l'estensione o grandezza de' terreni si chiama *moggio*, il quale ha 30 passi di lunghezza ed altrettanti di larghezza, essendo ogni passo lungo *palmi* $7 \frac{2}{3}$. Il passo che regola le misure agrarie è dunque diverso dal passo itinerario.

Le misure de' liquidi sono diverse per l'olio, e pel vino. L'unità di misura dell'olio è lo *stajo* che corrisponde ad un peso di rotoli $10 \frac{1}{2}$; esso si divide in 16 *quarti*, ed ogni quarto si divide in 6 *misurelli*. L'unità di misura del vino è il *barile* che contiene 60 caraffe. Dodici *barili* formano una *botte*, e due *botti* formano un *carro*.

L'unità di misura per gli aridi, come il grano e le biade di ogni genere, è il *tomolo* il quale contiene 24 *misure*.

L'unità di peso è la libbra che si divide in 12 *once*, l'*oncia* si divide in 10 *dramme*, la *dramma* in 3 *trappesi* o *scrupoli*.

poli, e lo scrupolo in 20 grani o acini. I metalli e le medicine si valutano a libbre, ma pei commestibili ed anche per alcuni oggetti di vestiario si fa uso del *rotolo* che è un peso di once $33 \frac{1}{3}$, ossia di 1000 trappesi. Cento rotoli formano un *cantajo*.

Un sistema di misure dovrebbe esser composto in modo che tutte dipendessero dall'unità di misura lineare, mediante rapporti facili ad assegnarsi. Senza questo legame, le misure alterandosi col tempo per l'immenso numero di copie che se ne fanno, non possono agevolmente rettificarsi e ridursi alla primitiva grandezza. Un sistema di misure prende il nome di *sistema metrico* quando ha questa condizione, e quando l'unità lineare è stabilita in modo da potersi essa pure rettificare in qualunque tempo col paragone di qualche altra misura naturale invariabile. Per facilità de' calcoli dovrebbe il sistema metrico essere anche *decimale*, ossia dovrebbero le suddivisioni delle varie misure farsi da 10 in 10; ma quest'ultima condizione non può sempre accordarsi con gli usi de' diversi paesi.

Le misure napoletane quì sopra esposte dovrebbero esser rettificate per poter formare un sistema metrico.

La Sicilia ha un sistema metrico di cui la base è il *palmò siciliano*, un poò più piccolo del palmò napoletano.

§. 63.

Del passo e del palmò geografico.

Tutte le misure descritte nel §. precedente, all'infuori del palmò e del miglio, appartengono quasi alla sola Città di Napoli. Esse variano sensibilmente di grandezza ed anche di nome nelle Provincie. Questa molteplicità di misure che rende evidentemente difficili ed incerte le contrattazioni, è un inconveniente che si osserva pressochè in tutti gli Stati di Europa.

In Francia da non molto tempo si è stabilito in tutta l'estensione del Regno un sistema metrico decimale fondato sull'unità lineare chiamata *metro*, che ha un rapporto conosciuto colla grandezza del globo terrestre. Dieci milioni di metri, o più esattamente 10000723,2 secondo i calcoli dell'astronomo Delambre, formano la lunghezza della quarta parte del meridiano terrestre, il quale corrisponde ad un intiero giro della Terra. Il metro si divide in parti decimali, e le sue frazioni 0,1; 0,01; 0,001 ec. prendono i nomi di *decimetro*, *centimetro*, *millimetro* etc.

Nel Reale Ufficio Topografico di Napoli volendo adottarsi un'unità di misura lineare che fosse contenuta un numero intiero di volte nel quarto del meridiano terrestre, non si è dovuto ricorrere a misure straniere, ma il passo itinerario napoletano ha

adempito all'oggetto. In fatti supponendo diviso il quadrante terrestre in 90 parti eguali, ognuna di esse che si chiama *grado*, contiene 60 miglia napoletane, le quali prendono quindi, il nome di *miglia geografiche da 60 al grado*. Per conseguenza il passo itinerario che è la millesima parte del miglio, ed il palmo che è la settima parte del passo, sono contenuti un esatto numero di volte nella lunghezza del quadrante terrestre, e possono da questa loro origine denominarsi *passo geografico*, e *palm*o *geografico*.

In verità il palmo di commercio napoletano sembra differire per una piccolissima quantità dal palmo geografico dedotto, come qui appresso, dalla lunghezza del quadrante terrestre calcolata dal signor Delambre. Ma questa differenza sicuramente trascurabile per gli usi del commercio, non potrebbe neppure determinarsi con precisione, perchè non esistono del palmo campestri di buona costruzione e ben conservati, che diano una conoscenza sicura della sua vera lunghezza.

Il passo geografico si divide in parti decimali per gli usi del Reale Ufficio Topografico.

§. 64.

Rapporti delle misure

È uso ormai ricevuto generalmente di rapportare l'unità di misura lineare di ogni paese al metro, per essere questa misura meglio stabilita di qualunque altra.

Il rapporto del passo al metro si ottiene con grande facilità. Siccome ogni miglio geografico contiene 1000 passi, 60 miglia che formano un grado conterranno 60×1000 , ovvero 60000 passi; ed i 90 gradi che compongono il quadrante terrestre conterranno 90×60000 , ovvero 5400000 passi. Dunque il passo geografico sarà $\frac{1}{5400000}$ del quadrante terrestre; ma la lunghezza di questo quadrante è di metri 10000723,2, quindi il passo sarà eguale ad

$\frac{1}{5400000}$ di 10000723,2 metri, ossia a $\frac{10000723,2 \text{ metri}}{5400000}$. Fatta

la divisione si trova,

$$\begin{array}{c} \text{passo geog.} \quad \text{metro} \\ 1 \quad = 1,8519858 \end{array}$$

In conseguenza il palmo geografico sarà eguale ad $\frac{1,8519858}{7}$,

ovvero si avrà

$$\begin{array}{c} \text{palmo geog.} \quad \text{metri} \\ 1 \quad = 0,2645694 \end{array}$$

La lunghezza del palmo napoletano di commercio paragonata con quella del metro, si fa corrispondere più comunemente a 0,26367, per cui, secondo questa opinione, il palmo geografico sarebbe più lungo del palmo comune per $\frac{9}{10}$ di millimetro.

Il palmo siciliano paragonato pure col metro risulta eguale a 0,2578

Per conoscere il numero di metri che corrisponde ad un dato numero di passi o di palmi, si può dare una regola generale applicabile a qualunque operazione dello stesso genere.

Poichè un passo equivale ad 1,8519858, si potrà stabilire la proporzione seguente,

passo : metro :: 1,8519858 : 1

ovvero moltiplicando i termini della seconda ragione per 10000000, si avrà,

passo : metro :: 18519858 : 10000000

Da questa proporzione pel §. 53 potranno dedursi le due eguaglianze,

$$\text{passo} = \frac{18519858}{10000000} \times \text{metro}, \text{ e}$$

$$\text{metro} = \frac{10000000}{18519858} \times \text{passo}$$

ovvero per ciò che si è detto nel §. 25,

$$\text{passo} = \frac{18519858}{10000000} \text{ di metro}, \text{ e}$$

$$\text{metro} = \frac{10000000}{18519858} \text{ di passo}$$

Quindi, se per esempio 504,25 passi vogliano ridursi a metri, non si dovrà far altro che moltiplicare la prima eguaglianza per 504,25, e si avrà

$$504,25 \text{ passi} = 504,25 \times \frac{18519858}{10000000} \text{ di metro} = 933,8638 \text{ metri}$$

E viceversa se 35,2 metri vogliano ridursi a passi, si moltiplicherà la seconda eguaglianza per 35,2, e sarà

$$35,2 \text{ metri} = 35,2 \times \frac{10000000}{18519858} \text{ di passo} = 19,0066 \text{ passi.}$$

Dalla stessa eguaglianza si rileva che un metro equivale a $\frac{70000000}{18519858}$ di palmo geografico, ovvero a palmi $3\frac{3}{4}$ circa.

Voglia inoltre conoscersi quanti palmi siciliani sono contenuti in un miglio geografico da 60 al grado. Sapendosi che questo miglio è composto di 7000 palmi geografici, dovrà cer-

carsi 7000 palmi geografici a quanti palmi siciliani corrispondono. Dai rapporti notati più sopra può dedursi la proporzione, *palmi geog. : pal. sic. :: 0,2646 : 0,2578 :: 2646 : 2578*

e quindi l'eguaglianza,

$$\text{palmo geog.} = \frac{2646}{2578} \text{ di pal. sic.}$$

e perciò,

$$7000 \text{ pal. geog.} = 7000 \times \frac{2646}{2578} \text{ di pal. sic.} = 7184,64 \text{ pal. sic.}$$

Per ultimo esempio di simili conversioni, sapendosi che un *franco* (moneta di Francia) vale 0,229 di nn *ducato napoletano*, e che una *lira austriaca* corrisponde a 0,87 di franco, si cerchi una *lira austriaca* che parte è del ducato.

Dall'enunciazione del problema si rilevano le due eguaglianze,

$$\text{franco} = \frac{229}{1000} \text{ di ducato, e}$$

$$\text{lira aust.} = \frac{87}{100} \text{ di franco}$$

e mettendo in questa seconda eguaglianza l'espressione corrispondente al franco nella prima eguaglianza, sarà

$$\text{lira aust.} = \frac{87}{100} \text{ di } \frac{229}{1000} \text{ di ducato} = \frac{87}{100} \times \frac{229}{1000} \text{ di ducato} = 0,19923 \text{ di ducato.}$$

Il ducato napoletano, come il franco, è una moneta che ha una suddivisione decimale, cioè un ducato si divide in 100 *grana*, ed un grano in 10 *cavalli*, per cui la frazione 0,19923 di ducato corrisponde a 19 grana e cavalli 9 $\frac{3}{4}$ circa.

Finiremo questo articolo con far conoscere alcune principali misure lineari ed itinerarie di Europa.

La misura lineare esistente in Francia prima dell'introduzione del nuovo sistema metrico era il *pie*^{metri}*de* che corrisponde a

0,3248394. Esso è tuttora in uso nelle costruzioni militari di terra e di mare di molte nazioni. Il piede si divide in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Sei piedi formano una *tesa*. Le principali misure itinerarie di Francia sono la *lega comune*, e la *lega marina*; la prima è di 25 a grado, e la seconda di 20 a grado, ossia un grado del meridiano terrestre comprende 25 leghe comuni, oppure 20 leghe marine.

Il piede *legale*, o *Foot* stabilito in Inghilterra corrisponde a 0,3047945. Sei piedi formano una *tesa*, o *Fathom*, e tre piedi formano un *Yard*. Un miglio inglese è composto di 880 tese o fathoms.

La *tesa* di Vienna, o *Klafter* è composta di sei piedi, ed

egua^{metro}glia 1,89661. La lega tedesca è di 15 a grado.

Il piede del Reno è una misura usata in gran parte della Germania, che vale ^{metri} 0,3138.

L'*Archina* di Pietroburgo corrisponde a ^{metri} 0,7112; ed il miglio nuovo o *Wersta* di Russia è di $104 \frac{1}{2}$ a grado.

Il confronto delle misure itinerarie è egualmente facile di quello delle misure lineari. Così sapendosi che la lega comune di Francia è di 25 a grado, potrà stabilirsi la proporzione,

$$\text{miglio geog.} : \text{leg. com.} :: \frac{1 \text{ grado}}{60} : \frac{1 \text{ grado}}{25} :: 25 : 60$$

$$:: 5 : 12$$

e quindi,
lega comune $= \frac{25}{12}$ di miglio.

Ma il confronto delle misure superficiali, di capacità, e di peso dipende da cognizioni di Geometria e di Fisica, per cui non è qui luogo di parlarne.

DEL CALCOLO DE' NUMERI COMPLESSI.

§. 65.

Addizione de' numeri complessi.

I numeri *complessi* sono quelli in cui le unità principali sono divise in un numero di parti stabilito dall'uso, e queste parti sono suddivise similmente in altre, e così di seguito. Per esempio, 4 canne 5 palmi 3 once 2 minuti è un numero complesso; poichè, come abbiamo veduto, la canna è divisa secondo l'uso in 8 palmi, il palmo in 12 once, e l'oncia in 5 minuti. Il numero complesso contiene dunque diverse unità o *specie*. L'unità principale si chiama la *prima specie*, e l'ultima o la più piccola dicesi l'*ultima specie*.

L'*addizione de' numeri complessi si fa scrivendo le une sotto le altre le diverse specie d'unità, cominciando l'operazione dall'ultima specie, e riportando alle specie seguenti le unità corrispondenti se ve ne sono*. Per esempio

4 canne	6 palmi	8 once	4 minuti
16	2	3	1
0	4	11	3
1	0	0	2
22	6	0	0

La somma de' minuti essendo 10, corrisponde a 2 once, e perciò queste due unità si sono unite alla somma della colonna seguente. Così ancora le 24 once di questa colonna corrispondono a 2 palmi, che si sono riportati nella colonna de' palmi.

Sottrazione de' numeri complessi.

La sottrazione de' numeri complessi si fa, scrivendo le une sotto le altre le diverse specie di unità, cominciando l'operazione dall'ultima specie, ed improntando dalla specie antecedente un'unità quando la sottrazione non può eseguirsi. Per esempio

$$\begin{array}{r}
 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi } 0 \text{ oncie } 2 \text{ minuti} \\
 6 \qquad 2 \qquad 10 \qquad 4 \\
 \hline
 2 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 3
 \end{array}$$

Non potendo sottrarre 4 minuti da 2, si è improntata una unità da' palmi perchè non vi erano oncie. Un palmo si è considerato come 11 oncie e 5 minuti, e così il numero superiore si è cambiato in 8 can. 4 p. 11 on. 7 min., e la sottrazione ha potuto eseguirsi.

Moltiplicazione de' numeri complessi.

La moltiplicazione e la divisione de' numeri complessi divengono assai facili quando si sappia convertire un numero complesso in numero incomplesso, e viceversa un numero incomplesso in numero complesso; intendendosi per numero incomplesso un numero della forma di quelli finora considerati, cioè intero, frazionario, o decimale.

Sia da convertirsi il numero complesso 8 canne 5 palmi 0 oncia 2 minuti in numero incomplesso. Si comincerà a ridurre il numero complesso ad unità dell'ultima specie nel modo seguente:

$$\begin{array}{r}
 8 \text{ canne} \\
 8 \\
 \hline
 \text{Prodotto } 64 \text{ palmi uguali ad } 8 \text{ canne} \\
 5 \\
 \hline
 \text{Somma } 69 \text{ palmi} = 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi} \\
 12 \\
 \hline
 138 \\
 69 \\
 \hline
 \text{Prodotto } 828 \text{ oncie} = 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi } 0 \text{ oncia} \\
 5 \\
 \hline
 \text{Prodotto } 4140 \text{ minuti} = 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi } 0 \text{ oncia} \\
 2 \\
 \hline
 \text{Somma } 4142 \text{ minuti} = 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi } 0 \text{ oncia } 2 \text{ minuti}
 \end{array}$$

Nella quale operazione si sono ridotte successivamente le canne in palmi moltiplicandole per 8, i palmi in once moltiplicandoli per 12, e le once in minuti moltiplicandole per 5. Dunque il numero dato di canne, palmi, once e minuti contiene 4142 minuti.

Bisogna in secondo luogo vedere una canna quanti minuti contiene :

$$\begin{array}{r} 1 \text{ canna} \\ 8 \\ \hline \text{Prodotto } 8 \text{ palmi} = 1 \text{ canna} \\ 12 \\ \hline \text{Prodotto } 96 \text{ once} = 1 \text{ canna} \\ 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Prodotto } 480 \text{ minuti} = 1 \text{ canna}$$

Una canna contiene 480 minuti, e perciò un minuto è $\frac{1}{480}$ di canna. Ma il numero dato conteneva 4142 minuti, dunque questo numero corrisponde a $\frac{4142}{480}$ di canna. In questo modo il numero complesso si è ridotto ad una frazione della prima specie.

Al contrario voglia sapersi la frazione $\frac{4142}{480}$ di canna quante canne contiene, quanti palmi, once, e minuti. Si otterrà subito ciò che si cerca per mezzo della divisione.

$$\begin{array}{r} 4142 \\ 3840 \\ \hline 1.^{\circ} \text{ resto } 302 \text{ canne} \\ 8 \\ \hline 2416 \text{ palmi} \\ 2400 \\ \hline 2.^{\circ} \text{ resto } 16 \text{ palmi} \\ 12 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 192 \text{ once} \\ 5 \\ \hline 960 \text{ minuti} \\ 960 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ \hline 8 \text{ canne } 5 \text{ palmi } 0 \text{ once } 2 \text{ minuti} \end{array}$$

Dalla prima divisione sono avanzate 302 canne da dividersi per 480. Per eseguire la divisione si sono ridotte le canne in palmi moltiplicandole per 8, e si è avuto indi un quoziente 5 di palmi, ed un resto 16 anche di palmi. Si sono ridotti i 16 palmi in once, ed il prodotto 192 non essendo divisibile per 480, si è posto 0 once nel quoziente, e si sono ridotte le 192 once in minuti. La divisione dei minuti ha potuto eseguirsi, e si sono avuti nel quoziente 2 minuti. Se vi fosse stato un ultimo resto di minuti, per esempio 120 minuti, si aggiungeva al quoziente la frazione $\frac{120}{480}$ di minuto, ovvero $\frac{1}{4}$.

Ciò premesso, la moltiplicazione di due numeri complessi si eseguirà, *riducendo il moltiplicando ed il moltiplicatore in frazioni della prima specie, moltiplicando fra loro le due frazioni ottenute, e riducendo a numero complesso il prodotto delle frazioni medesime*. Per esempio, si domanda l'importo di 8 canne 6 palmi 3 once di una stoffa che si è comprata a 20 lire 14 soldi 8 denari la canna. Il prodotto di questi due numeri complessi darà il prezzo cercato. Riduciamo il moltiplicando ed il moltiplicatore in frazioni di lira e di canna, avvertendo che la lira è composta di 20 soldi, ed il soldo di 12 denari (a). Avremo,

20 lire	8 canne
20	8
400 soldi	64 palmi
14	6
414 soldi	70 palmi
12	12
828	140
414	70
4968 denari	840
8	3
4976 denari	843 once

E siccome la lira contiene 20 $\times$ 12, ovvero 240 denari, e la canna contiene 96 once, sarà

$$20 \text{ lire } 14 \text{ soldi } 8 \text{ denari} = \frac{4976}{240} \text{ di lira} = \frac{311}{15}$$

$$8 \text{ canne } 6 \text{ palmi } 3 \text{ once} = \frac{843}{96} \text{ di canna} = \frac{281}{32}$$

(a) Si è usata in questo esempio una moneta straniera come la lira, perchè il nostro ducato essendo una moneta decimale, la moltiplicazione di ducati per canne si riduce a quella di un numero incomplesso per un numero complesso, nè appartiene al caso più generale che si vuole qui considerare.

Moltiplicando fra loro queste due frazioni si avrà $\frac{87391}{480}$, il quale prodotto si ridurrà in lire, soldi, e denari con la divisione,

$$\begin{array}{r}
 87391 \\
 480 \overline{) 87391} \\
 \underline{3039} \\
 3840 \\
 \underline{991} \\
 960 \\
 \underline{31} \text{ lire} \\
 20 \\
 \underline{620} \\
 480 \\
 \underline{140} \text{ soldi} \\
 12 \\
 \underline{280} \\
 14 \\
 \underline{1680} \\
 1440 \\
 \underline{240} \text{ denari}
 \end{array}$$

ultimo resto 240 denari

Ma la moltiplicazione de' numeri complessi si esegue anche col metodo così detto di *prendere in parti*. Siano da moltiplicarsi gli stessi due numeri precedenti; si farà come segue,

$$\begin{array}{r}
 20 \text{ lire } 14 \text{ soldi } 8 \text{ den.} \\
 8 \text{ can. } 6 \text{ pal. } 3 \text{ on.} \\
 \hline
 160 \text{ lir} \\
 \text{Per } 10 \text{ soldi} . . . 4 \\
 \text{Per } 4 \text{ soldi} . . . 1 \quad 12 \text{ sol.} \\
 \text{Per } 2 \text{ soldi} 16 \text{ sol.} \\
 \text{Per } 8 \text{ denari} 5 \quad 4 \text{ den.} \\
 \\
 \text{Per } 4 \text{ palmi} . . 10 \quad 7 \quad 4 \\
 \text{Per } 2 \text{ palmi} . . 5 \quad 3 \quad 8 \\
 \text{Per } 1 \text{ palmo} 2 \text{ lir } 11 \text{ s } 10 \text{ d} \\
 \text{Per } 3 \text{ once} 12 \quad 11 \frac{x}{2} \\
 \hline
 \text{Prodotto totale } 182 \text{ l} \quad 1 \text{ s} \quad 3 \text{ d } \frac{x}{2}
 \end{array}$$

ser di lire, il moltiplicando deve esprimer lire. Facendo altrimenti, l'operazione diviene molto complicata, nè può applicarsi a rigore il metodo di prendere in parti. Un tal modo di procedere è altronde indicato dalla stessa definizione della moltiplicazione, poichè in generale il prodotto di due numeri non è altro che il moltiplicando ripetuto tante volte quante unità si contengono nel moltiplicatore, e perciò il moltiplicando ed il prodotto sono naturalmente del medesimo genere.

Finalmente il metodo di prendere in parti serve ancora per risolvere con grande facilità una regola del tre in date circostanze. Per esempio si sa che un mulino macina 98 tomoli e 15 misure di grano in 12 ore, si domanda quanto grano macinerà in 5 ore e 37 minuti. La quantità che si cerca dovrebbe trovarsi per mezzo della proporzione

$$12 \text{ ore} : 5 \text{ ore } 37 \text{ min.} :: 98 \text{ tom. } 15 \text{ mis.} : x$$

nella quale per ottenere il valore di x bisognerebbe eseguire una moltiplicazione ed una divisione di numeri complessi. In vece si farà come segue.

In 12 ore . il mulino macina . . 98^{tom.} 15^{mis.}

In 4 ore. . . . la terza parte. . .	32 ^t	21 ^m
In 1 ora. . . . la quarta parte . .	8	5, 25
In 30 minuti. . la metà	4	2, 625
In 6 minuti . . la quinta parte . .		19, 725
In 1 minuto. . la sesta parte. . .		3, 2875

Somma. In 5 ore 37 min. il mulino macinerà 46^t 3,^m8875

la quale operazione si comprende immediatamente da chi conosce la teoria delle proporzioni.

§. 68.

Divisione de' numeri complessi.

Nella divisione de' numeri complessi si considerano due casi.

1.^o Quando il dividendo è complesso ed il divisore in complesso.

2.^o Quando il dividendo ed il divisore sono ambedue complessi, oppure è complesso il solo dividendo.

1.^o Caso. Siano da distribuirsi 140 canne 6 palmi 3 once 2 minuti di stoffa ad 8 persone; l'operazione procederà nel modo seguente,

90

$$\begin{array}{r} 140^{\circ} 6' 3'' 2''' \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 56 \end{array}$$

1.° resto 4 canne

$$\begin{array}{r} 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 32 \end{array}$$

2.° resto 6 palmi

$$\begin{array}{r} 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 72 \end{array}$$

3.° resto 3 oncie

$$\begin{array}{r} 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 16 \end{array}$$

4.° resto 1 minuto

8

$$\begin{array}{r} 17^{\circ} 4' 9'' 2''' \frac{2}{3} \end{array}$$

In questo caso dunque si esegue la divisione come su i numeri interi, se non che ogni resto che si ottiene si riduce in unità della specie seguente, aggiungendo al numero che risulta da tale riduzione le unità della stessa specie contenute nel dividendo, e così si continua la divisione sino all'ultima specie.

Può avvenire che il divisore contenga una frazione, come se dovesse dividersi $140^{\circ} 6' 3'' 2'''$ per $8 \frac{2}{3}$. Allora il divisore medesimo si ridurrà ad una sola frazione $\frac{26}{3}$, e la divisione del numero complesso per questa frazione si eseguirà come quella di un intero per una frazione (§. 28), vale a dire si moltiplicherà $140^{\circ} 6' 3'' 2'''$ per 3, ed il prodotto si dividerà per 26.

2.^o Caso. La divisione in questo caso si esegue riducendo il dividendo ed il divisore a numeri incomplessi, come si è insegnato di sopra (§. 67), eseguendo la divisione su questi numeri con le regole date pe' numeri astratti, e riducendo in ultimo il quoziente a numero complesso. I seguenti esempi serviranno a mostrare le modificazioni che può avere questa regola generale nelle diverse circostanze, per rendere più breve il calcolo.

Si domanda quante canne di panno possono comprarsi con 30 lire 18 soldi 4 denari, sapendosi che una canna ha costato 8 lire 4 soldi. Osserviamo che quì il dividendo ed il divisore esprimono numeri dello stesso genere, cioè lire, e riduciamo tanto l'uno che l'altro ad unità della specie più piccola in essi contenuta, vale a dire ad unità di denari. Il dividendo conterrà 7420 denari, ed il divisore 1968; e poichè il denaro è $\frac{1}{240}$ della lira, il dividendo sarà $\frac{7420}{240}$ di lira, ed il divisore sarà $\frac{1968}{240}$ pure di lira. L'operazione dunque è ridotta a dividere la frazione $\frac{7420}{240}$ per l'altra $\frac{1968}{240}$. Ma quando due frazioni hanno lo stesso denominatore, si dividono dividendo i loro numeratori (§. 29), dunque dovrà dividersi 7420 per 1968, e ridurre il quoziente in canne, la quale operazione si eseguirà come quì appresso,

$$\begin{array}{r} 7420 \\ 1968 \overline{) 5904} \\ \hline 1.^\circ \text{ resto } 1516 \text{ canne} \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12128 \\ 11808 \overline{) 320} \\ \hline 2.^\circ \text{ resto } 320 \text{ palmi} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 640 \\ 32 \overline{) 3840} \\ \hline 1968 \overline{) 1872} \\ \hline 3.^\circ \text{ resto } 1872 \text{ once} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9360 \\ 7872 \overline{) 1488} \end{array}$$

Quindi, allorchè il dividendo ed il divisore sono numeri dello

stesso genere, possono ridursi a due frazioni dello stesso denominatore, e l'operazione riesce più semplice.

Un peso di 15 libbre 10 oncie 4 dramme $\frac{2}{3}$ di china è costato 256 lire 4 soldi 6 denari; si domanda l'importo di una libbra. In questo esempio il dividendo 256 lire 4 soldi 3 denari, ed il divisore 15 libbre 10 oncie 4 dr $\frac{2}{3}$ sono due numeri di diverso genere. La divisione potrà eseguirsi colla regola generale del 2.^o caso, ma riuscirà forse più facile ridurre il solo divisore a numero incompleto, ed usare indi la regola data pel 1.^o caso.

Il divisore 15 libbre 10 oncie 4 dr $\frac{2}{3}$ ridotto a dramme diviene 1904 $\frac{2}{3}$ dramme, e siccome una libbra contiene 12 $\times$ 10, ovvero 120 dramme, una dramma sarà $\frac{1}{120}$ di libbra, e 1904 $\frac{2}{3}$ dramme, ossia $\frac{3808}{3}$ di dramma, eguaglieranno $\frac{3808}{3}$ di $\frac{1}{120}$ di libbra, cioè $\frac{3808}{360}$ di libbra (§. 24). Deve ora moltiplicarsi il numero 256 ^{lir} 4 ^s 6 ^d per 240, e dividersi il prodotto per 3808. Ecco l'operazione.

$$\begin{array}{r}
 256^{\text{l}} 4^{\text{s}} 6^{\text{d}} \\
 \underline{240} \\
 10240^{\text{l}} \\
 512 \\
 \text{Per } 4 \text{ soldi } 48 \\
 \text{Per } 6 \text{ denari } 6 \\
 \hline
 61494 \text{ lire} \\
 3808 \\
 \hline
 23404 \\
 22854 \\
 \hline
 1.^{\circ} \text{ resto } 550 \text{ lire} \\
 20 \\
 \hline
 11000 \\
 7618 \\
 \hline
 2.^{\circ} \text{ resto } 3382 \text{ soldi} \\
 12 \\
 \hline
 6764 \\
 3382 \\
 \hline
 40584 \\
 3808 \\
 \hline
 3.^{\circ} \text{ resto } 2494 \text{ denari}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3808 \\
 \hline
 16^{\text{l}} 2^{\text{s}} 10^{\text{d}} \frac{2494}{3808}
 \end{array}$$

Venti tomoli e 22 misure di grano hanno importato $25^{\text{ducati}} \frac{93}{15 \text{ grana } 9 \text{ cavalli}}$, *si domanda l'importo di un tomolo*. Deve dividersi $25^{\text{d}} 15^{\text{s}} 9^{\text{a}}$ per $20^{\text{t}} 22^{\text{m}}$. Questi due numeri sono di diverso genere, ma il dividendo può considerarsi come incompleso, poichè corrisponde a 25159 cavalli. Si riduca anche il divisore a numero incompleso, e la divisione potrà eseguirsi colle regole de' numeri astratti. Il divisore corrisponde a $\frac{562}{24}$ di tomolo, e dividendo 25159 per questa frazione si ottiene per quoziente $1202 \frac{206}{242}$, il quale numero dovrà esprimere cavalli, onde il prezzo di un tomolo di grano sarà, 1 ducato 20 grana 2 cavalli $\frac{206}{242}$.

F I N E.



INDICE DELLE MATERIE.

Num.	Pagina.
Avvertimento	3

PRELIMINARI.

1 <i>Distinzione delle diverse specie di grandezze o quantità</i>	5
2 <i>Del sistema di numerazione</i>	ivi
3 <i>Maniera di leggere un numero</i>	8
4 <i>Cosa sia un numero astratto ed un numero concreto</i>	9

OPERAZIONI SU I NUMERI INTERI.

5 <i>Dell'addizione de' numeri interi</i>	9
6 <i>Della sottrazione de' numeri interi</i>	10
7 <i>Della riprova dell'addizione e della sottrazione</i>	11
8 <i>Della moltiplicazione de' numeri interi</i>	12
9 <i>Della divisione de' numeri interi</i>	15
10 <i>Riprova della moltiplicazione e della divisione</i>	21

DELLE FRAZIONI.

11 <i>Origine delle frazioni</i>	21
12 <i>Cosa significano numeratore e denominatore, frazione vera e frazione spuria</i>	24
13 <i>Tavola rappresentante i cambiamenti che si operano su di una frazione, moltiplicando o dividendo uno de' suoi termini</i>	25
14 <i>Non si altera il valore di una frazione se si moltiplicano o si dividono i suoi termini per un medesimo numero</i>	27
15 <i>Modo di ridurre una frazione a più semplice espressione</i>	28
16 <i>Regole per conoscere quando un numero è divisibile per 2, per 5, per 3, o per 9</i>	ivi
17 <i>Cosa s' intende per numero primo</i>	30
18 <i>Ridurre una frazione a minimi termini per mezzo del massimo comune divisore</i>	31
19 <i>Dell'addizione e della sottrazione delle frazioni</i>	32
20 <i>Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore</i>	ivi
21 <i>Dell'addizione, e della sottrazione degl' interi accompagnati da frazioni</i>	34

Num.	Pagina.
22 <i>La tavola del §. 13 serve per moltiplicare o per dividere una frazione qualunque per un numero intero</i>	35
23 <i>Della moltiplicazione di due frazioni</i>	ivi
24 <i>Il prodotto di due frazioni vere è sempre minore di ciascuno de' suoi fattori , per cui prende il nome di frazione di frazione</i>	37
25 <i>Moltiplicare un intero per una frazione</i>	38
26 <i>Ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione</i>	ivi
27 <i>Della moltiplicazione delle frazioni unite agl' interi. .</i>	39
28 <i>Della divisione di un intero per una frazione e viceversa</i>	40
29 <i>Della divisione di una frazione per un'altra</i>	ivi
30 <i>Della divisione delle frazioni unite agl' interi.</i>	42

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

31 <i>Origine delle frazioni decimali</i>	42
32 <i>Maniera di scrivere le frazioni decimali , e loro relazione con le frazioni ordinarie</i>	43
33 <i>Una frazione decimale non si altera se alla sua destra si aggiungano o si sopprimano uno o più zeri. . .</i>	45
34 <i>Dell'addizione de' decimali</i>	ivi
35 <i>Della sottrazione de' decimali</i>	ivi
36 <i>Alterazione che soffre un decimale variando di luogo la virgola.</i>	46
37 <i>Della moltiplicazione de' decimali</i>	47
38 <i>Della divisione de' decimali</i>	48
39 <i>Maniera di ridurre una frazione ordinaria qualunque a frazione decimale.</i>	ivi
40 <i>Delle frazioni decimali periodiche.</i>	50
41 <i>Data una frazione decimale qualunque trovare la frazione ordinaria corrispondente</i>	51

DELLE PROPORZIONI.

42 <i>Di alcuni segni de' quali si fa uso nell' Algebra . . .</i>	53
43 <i>Delle ragioni e delle proporzioni in generale.</i>	54
44 <i>Una ragione geometrica non cambia , se si moltiplichino o si dividano i suoi termini per un medesimo numero</i>	56
45 <i>In una proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' termini medii</i>	ivi
46 <i>Cambiamenti di luogo che possono effettuarsi ne' termini di una proporzione.</i>	57
47 <i>Non si altera una proporzione se si moltiplichino o si dividano i suoi antecedenti , o i suoi conseguenti per un medesimo numero.</i>	58

Num.	Pagina.
48 <i>Se due proporzioni abbiano una ragione di comune, le due rimanenti ragioni saranno eguali fra di loro.</i>	58
<i>Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti di esse sono in proporzione; e se hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti sono in proporzione.</i>	59
49 <i>Da ogni proporzione geometrica componendo o dividendo si ottiene un'altra porporzione.</i>	ivi
<i>In ogni proporzione la somma o la differenza de' due primi termini sta alla somma o alla differenza degli altri due termini, come il primo al secondo antecedente, o come il primo al secondo conseguente.</i>	61
<i>In ogni proporzione la somma de' due primi termini sta alla loro differenza come la somma degli altri due termini sta alla differenza de' medesimi.</i>	ivi
50 <i>La somma o la differenza degli antecedenti di una proporzione, sta rispettivamente alla somma o alla differenza de' conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.</i>	ivi
<i>La somma degli antecedenti di una proporzione sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti sta alla differenza de' medesimi.</i>	62
51 <i>Se si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente al suo conseguente.</i>	ivi
52 <i>Se si hanno due proporzioni, il prodotto degli antecedenti delle prime ragioni sta al prodotto de' conseguenti, come il prodotto degli antecedenti delle seconde ragioni sta al prodotto de' conseguenti.</i>	63
53 <i>Della regola del tre.</i>	ivi
54 <i>La regola del tre si distingue in diretta ed inversa, quando si applica ai problemi di Aritmetica.</i>	64
<i>Maniera d'intavolare una proporzione.</i>	65
55 <i>Cosa s'intende per ragion composta.</i>	66
56 <i>Della regola del tre composta.</i>	ivi
57 <i>Regola d'interesse.</i>	72
58 <i>Dello sconto degli effetti di commercio.</i>	73
59 <i>Della regola di compagnia.</i>	74
60 <i>Della ragione e della proporzione aritmetica.</i>	76
61 <i>Regola di alligazione.</i>	77

DELLE MISURE, E DEL LORO CONFRONTO.

62 <i>Delle principali misure napoletane.</i>	78
63 <i>Del passo e del palmo geografico.</i>	79
64 <i>Rapporti delle misure.</i>	80

Num.

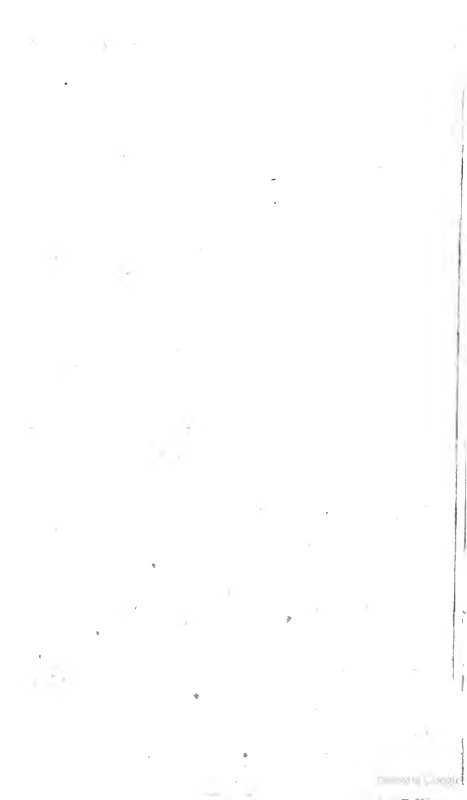
Pagina.

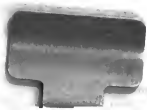
DEL CALCOLO DE' NUMERI COMPLESSI.

65	Addizione de' numeri complessi	83
66	Sottrazione de' numeri complessi	84
67	Moltiplicazione de' numeri complessi	ivi
68	Divisione de' numeri complessi	89

504
680022







DALLA REALE TIPOGRAFIA DELLA GUERRA.